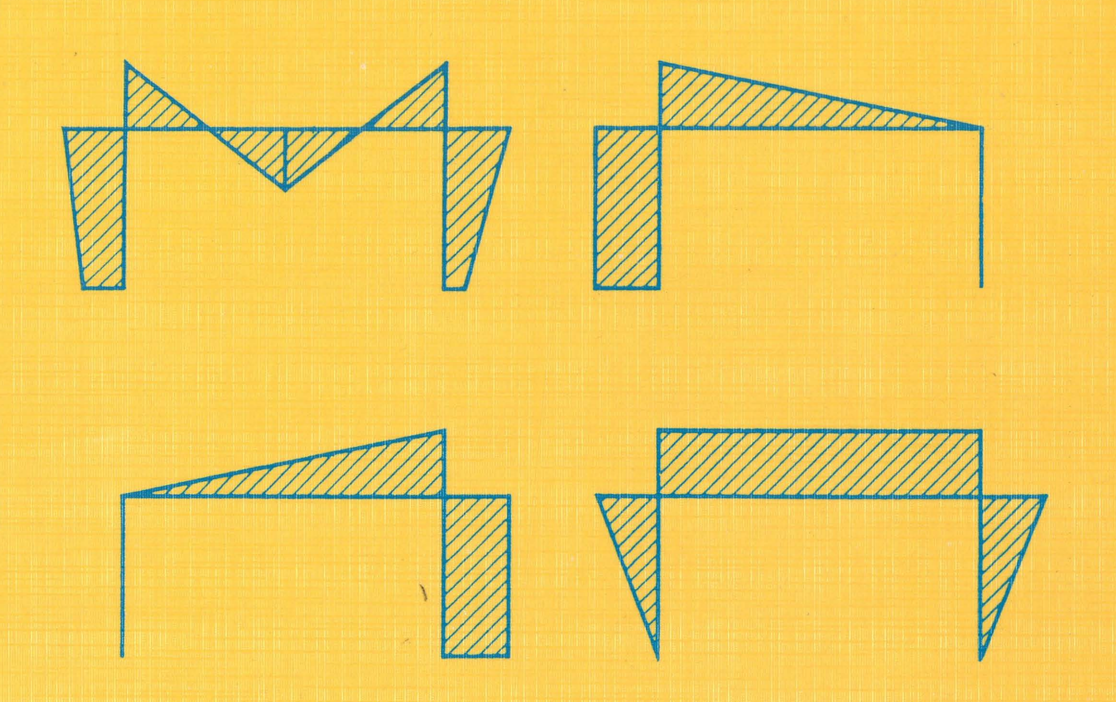
Vigas y pórticos

Jacques Heyman



Instituto Juan de Herrera
Escuela Técnica Superior
de Arquitectura de Madrid

Vigas y pórticos

Jacques Heyman

El profesor Heyman es bien conocido en España por su aportación decisiva a la teoría de estructuras de fábrica. Este trabajo estuvo precedido por una intensa labor, formando parte del famoso grupo de Cambridge dirigido por John Baker, en el desarrollo de la teoría plástica de pórticos de acero.

El presente libro recoge y destila toda la experiencia práctica y teórica que fue necesaria para producir lo que supuso un giro copernicano en la forma de atacar los problemas estructurales: la teoría plástica. También es fruto de una amplia experiencia docente. Trata tanto la teoría elástica como la plástica y lo hace de la forma más general examinando la naturaleza de las ecuaciones básicas: las de equilibrio, de compatibilidad y del material. El manejo consciente de éstas, a las que suma la ecuación del trabajo virtual, es constante en todo el libro; gracias a esto la exposición adquiere un grado inusual de concisión y claridad.

Se explica también la característica esencial de cualquier estructura hiperestática: la capacidad para experimentar esfuerzos de «auto-solicitación» en ausencia de cargas. Esta propiedad, que para las estructuras porticadas se deduce directamente de la ecuación fundamental de equilibrio a flexión, permite imaginar cualquier sistema de momentos flectores en equilibrio con las cargas actuantes, como la suma de dos sistemas de momentos: libres (obtenidos liberando vínculos) y reactantes (en equilibrio con cargas cero). La división permite comprender con profundidad el funcionamiento de las estructuras porticadas.

TEXTOS SOBRE TEORÍA E HISTORIA DE LAS CONSTRUCCIONES

Colección dirigida por Santiago Huerta Fernández

A. Choisy. **El arte de construir en Roma.**

A. Choisy. **El arte de construir en Bizancio.**

A. Choisy. **Historia de la arquitectura.** (en preparación)

R. Guastavino. **Ensayo sobre la construcción cohesiva.** (en preparación)

J. Heyman. **Teoría, historia y restauración de estructuras de fábrica.**

J. Heyman. **El esqueleto de piedra. Mecánica de la arquitectura de fábrica.**

J. Heyman. **La ciencia de las estructuras.**

J. Heyman. **Vigas y pórticos.**

S. Huerta. **Arcos, bóvedas y cúpulas.** (en preparación)

J. R. Perronet. **La construcción de puentes en el siglo XVIII.** (en preparación)

H. Straub. **Historia de la ingeniería de la construcción.** (en preparación)

A. Truñó. **Construcción de bóvedas tabicadas.**

E. Viollet-le-Duc. **La construcción medieval.**

Vigas y pórticos

Vigas y pórticos

Jacques Heyman

traducción y prólogo de:
Santiago Huerta Fernández

INSTITUTO JUAN DE HERRERA
Escuela Técnica Superior de Arquitectura
Madrid

Edición y traducción íntegra de la edición original: Jacques Heyman, *Beames and Framed Structures*. 2.ª ed. Londres: Pergamon Press, 1974.

ISBN: 84–9728-054-7
Depósito Legal: M. 52.633-2002

Fotocomposición e impresión:
EFCA, S. A. Parque Industrial "La Monjas"
28850 Torrejón de Ardoz (Madrid)

Índice

Prólogo de *S. Huerta* ix

Introducción 1

1. Las ecuaciones básicas 3

Equilibrio 3

Cargas puntuales 11

Diagramas de momentos flectores reactantes 12

Deformación 14

Condiciones de contorno 15

Mecanismos y redundancias 16

Trabajo virtual 19

Ecuaciones de equilibrio a partir de mecanismos 22

Relación momento flector-curvatura 27

2. Vigas y pórticos elásticos 31

Resolución por integración directa 31

Método de Macaulay 37

El principio de superposición 42

Coeficientes de flecha 45

Las ecuaciones de pendiente-flecha 48

Otros métodos 54

Aplicación directa del trabajo virtual 59

Métodos de la energía para pórticos elásticos 65

Teorema de la reciprocidad 71

Análisis con modelos 73

Redistribución de momentos 79

Formulación matricial 92
Montaje de la matriz completa 98
Efectos térmicos 100

3. Vigas y pórticos plásticos 105
Teoremas del colapso plástico 114
Método de la combinación de mecanismos 119
Diagramas de interacción 124
Colapso por incrementos 134
Análisis elasto-plástico 142
Flechas en el colapso 146

Problemas 155

Prólogo

La práctica no es nada sin la teoría
J. Mignot

El profesor Heyman es bien conocido en España por su aportación decisiva a la teoría de estructuras de fábrica. Este trabajo estuvo precedido por una intensa labor, formando parte del famoso grupo de Cambridge dirigido por John Baker, en el desarrollo de la teoría plástica de pórticos de acero en los años 1950. La teoría plástica culminó con la demostración de los Teoremas Fundamentales. Éstos fueron vistos en primer lugar dentro del ámbito restringido de las estructuras porticadas de acero. Que las afirmaciones de estos teoremas —en particular las que se derivan del Teorema de la Seguridad— podían aplicarse a otros tipos y materiales fue una idea principalmente del profesor Heyman, quien ya en la segunda mitad de los años sesenta afirmaba: «la teoría plástica es la herramienta fundamental para el cálculo de cualquier estructura construida con un material no-frágil». Una consecuencia fue, precisamente, la «traducción» de los teoremas para el caso de la arquitectura de fábrica, culminando de esta manera la formalización rigurosa de la teoría, que Robert Hooke inició a finales del siglo XVII.

El presente libro fue publicado en 1964 (segunda edición en 1974). Recoge y destila, pues, toda la experiencia práctica y teórica que fue necesaria para producir lo que supuso un giro copernicano en la forma de atacar los problemas estructurales. También es fruto de una amplia experiencia docente. Trata tanto la teoría elástica como la plástica y lo hace de la forma más general examinando la natu-

raleza de las ecuaciones básicas: las de equilibrio, de compatibilidad y del material. El manejo consciente de éstas, a las que suma la ecuación del trabajo virtual, es constante en todo el libro; gracias a esto la exposición adquiere un grado inusual de concisión y claridad.

Se explica también la característica esencial de cualquier estructura hiperestática: la capacidad para experimentar esfuerzos de «auto-solicitación» en ausencia de cargas. Esta propiedad, que para las estructuras porticadas se deduce directamente de la ecuación fundamental de equilibrio a flexión, permite imaginar cualquier sistema de momentos flectores en equilibrio con las cargas actuantes, como la suma de dos sistemas de momentos: libres (obtenidos liberando vínculos) y reactantes (en equilibrio con cargas cero). La división permite comprender con profundidad el funcionamiento de estas estructuras y facilita la demostración de algunos teoremas (como el de la reciprocidad).

La teoría se expone con referencia a ejemplos, y el libro puede usarse como un manual por los estudiantes. No obstante, todos los ejemplos ilustran aspectos teóricos fundamentales: es un libro de teoría de estructuras. Cabría preguntarse si resulta útil estudiar teoría de estructuras hoy día, cuando hay una gran cantidad y variedad de programas informáticos de cálculo convencional de pórticos, a los que pueden sumarse los de MEF. La respuesta es que ahora, más que nunca, se precisa una sólida formación teórica pues sólo esta nos permitirá juzgar lo esencial de los programas: su grado de aplicabilidad al problema estructural en cuestión, la relevancia de los resultados obtenidos a la hora de entender el funcionamiento de la estructura real.

Precisamente el fácil acceso a programas de cálculo por ordenador debería permitir una mayor concentración en los aspectos teóricos fundamentales. El tiempo que antes había que invertir en aprender métodos manuales particulares de cálculo, podría ganarse en adquirir una mejor comprensión de los problemas estructurales. No es esta la tendencia que se observa. Unas veces la enseñanza se hace con referencia explícita a un programa determinado; otras, la exposición de la teoría parece ir destinada a la futura elaboración de programas de ordenador. La publicación de este libro es un intento de invertir esta tendencia. La práctica no es nada sin la teoría.

SANTIAGO HUERTA

Introducción

Una estructura porticada resiste la acción de las cargas aplicadas fundamentalmente por flexión de sus elementos. En el trabajo analítico que sigue se despreciarán todas las deformaciones que no sean debidas a la flexión; ésta es la hipótesis estructural usual en relación con los pórticos. Otra hipótesis que se acepta habitualmente, y que se adoptará aquí, es que las deformaciones de la estructura en su conjunto son pequeñas en relación con las longitudes de sus miembros. Esta suposición tiene consecuencias importantes; como se verá, si las deformaciones son despreciables, los sistemas de fuerzas pueden superponerse incluso si el material del pórtico no es elástico. Si, además, el material obedece la ley de Hooke, entonces pueden superponerse soluciones completas.

A lo largo de todo el libro se supondrá, además, que todos los elementos del pórtico permanecen estables, no produciéndose fenómenos de inestabilidad. Así, no se discutirá uno de los tres criterios fundamentales del análisis y cálculo de estructuras, el de la estabilidad. Los otros dos criterios, los de resistencia y rigidez de vigas y pórticos planos, forman el tema central de este libro. La teoría de estructuras, aplicada a los pórticos, se ocupa de la determinación de los momentos flectores en todo el pórtico, y de las deformaciones resultantes. No se ocupa de las «tensiones» o de las distribuciones de tensión; el cálculo de éstas es una parte de la «Resistencia de Materiales.»

Como se verá, la teoría de vigas y pórticos, tal y como se ha definido aquí, es un tema excepcionalmente sencillo dentro la mecánica estructural. En cada sección transversal sólo hay que calcular una cantidad, el momento flector. De hecho, para una estructura porticada sólo pueden escribirse tres tipos de ecuaciones y la solución se deduce de éstas.

Estas ecuaciones se definen en el Capítulo 1; son las de equilibrio y compatibilidad, junto con una tercera que relaciona el momento flector y la curvatura en una sección. Esta tercera ecuación, la «ley de deformación», no tiene por qué ser lineal; el Capítulo 2 se ocupa de las estructuras linealmente elásticas y el Capítulo 3 del colapso plástico de estructuras y de las estructuras elasto-plásticas.

Las estructuras isostáticas sólo precisan el empleo de la ecuación de equilibrio para obtener la distribución de momentos flectores bajo la carga. El cálculo de los momentos flectores para este tipo de estructuras se convierte, pues, en un ejercicio de sencilla estática. Por el contrario, en el caso de las estructuras hiperestáticas hay que utilizar las tres ecuaciones antes citadas para obtener los momentos flectores. En la resolución de un problema hiperestático pueden elegirse cantidades inicialmente desconocidas, ya sean fuerzas o deformaciones; el tipo de problema dictará qué elección conducirá a una solución más rápida. En ambos casos, puede usarse la ecuación de los trabajos virtuales para acortar el trabajo. La ecuación del trabajo virtual es una herramienta tan fundamental de la teoría de estructuras que una corta sección del Capítulo 1 se dedica a su deducción, así como a la exposición de las tres ecuaciones estructurales propiamente dichas.

1
Las ecuaciones básicas

Equilibrio

Supondremos que las deformaciones de vigas y pórticos son pequeñas, de modo que las ecuaciones de equilibrio se satisfarán con suficiente exactitud si se emplean en los cálculos las longitudes y orientaciones de los elementos sin deformar.

Consideremos un elemento estructural recto de sección simétrica. (Se supondrá en lo que sigue que las deformaciones se producen en el plano de la estructura, y que todas las cargas actúan en este plano, de modo que los elementos del pórtico no sufren ni torsiones ni flexiones secundarias.) La figura 1.1 muestra el elemento recto sin deformar AB que, sometido a la carga repartida w, se desplaza a la posición deformada $A'B'$. Por comodidad, se tomarán los ejes coordenados

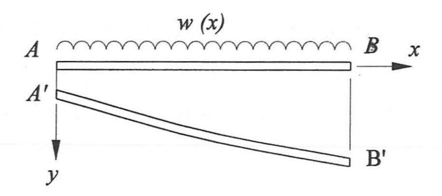


FIGURA 1.1

en A, el eje x a lo largo de AB y el eje y vertical hacia abajo. De acuerdo con la hipótesis de que las deformaciones no afectan a las ecuaciones de equilibrio, éstas no se verán afectadas por las flechas y. Así, las pendientes dy/dx del elemento deformado $A'B'$ son pequeñas, y la longitud de un arco ds puede tomarse con suficiente precisión como dx.

Consideremos un corto tramo dx del elemento bajo la acción de la carga exterior wdx. (La carga w no tiene por qué ser uniforme y, en general, será función de x.) Para mantener el equilibrio vertical del *elemento diferencial*, tiene que actuar un *esfuerzo cortante* en sus caras verticales. La figura 1.2 muestra el sistema de

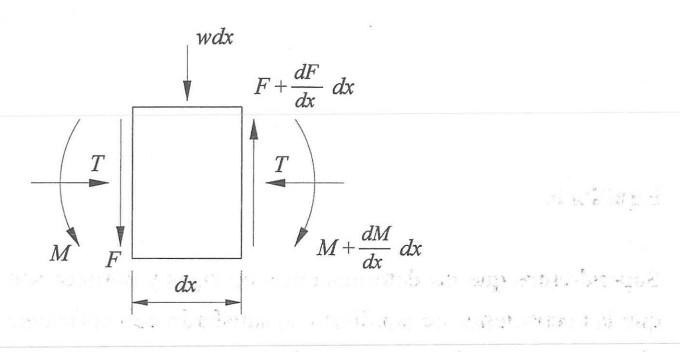


FIGURA 1.2

esfuerzos cortantes F, en sentido contrario a las agujas del reloj, que es preciso para que haya equilibrio. El equilibrio vertical se satisface si

$$\frac{dF}{dx} = w \tag{1.1}$$

Es evidente que, si se quiere mantener el equilibrio rotacional, un *momento flector* tiene que actuar en las caras verticales del elemento; los esfuerzos cortantes producen un par Fdx en sentido contrario a las agujas del reloj. Consideraremos positivo el momento flector M de la figura. Para que haya equilibrio,

$$\frac{dM}{dx} = F \tag{1.2}$$

Eliminando el esfuerzo cortante F entre las ecuaciones (1.1) y (1.2),

$$\frac{d^2M}{dx^2} = w \tag{1.3}$$

La ecuación (1.3) es la *ecuación de equilibrio* básica de una viga o de un elemento recto de un pórtico. Nótese que los momentos flectores M no son necesariamente los «producidos» en el elemento por la carga w. Es más, ya que la ecuación (1.3) es de segundo orden, los momentos flectores sólo se pueden obtener mediante dos constantes arbitrarias de integración. La ecuación (1.3) da

$$M = \iint w\, dx\, dx + Ax + B \tag{1.4}$$

donde las constantes A y B están todavía sin determinar.

Puede observarse que, en general, debe especificarse una tercera cantidad en cualquier sección, el esfuerzo normal T en el elemento. Como puede apreciarse a partir de la Figura 1.2 el equilibrio horizontal se satisface inmediatamente en la hipótesis de que las pendientes y flechas son pequeñas. El normal no entrará, por tanto, en las ecuaciones de un elemento concreto, y se considerará nulo en el estudio de las vigas. Sin embargo, para dos elementos rectos que se encuentran en ángulo recto, el esfuerzo normal T para un elemento se convertirá en el esfuerzo cortante para el otro, y viceversa, produciéndose una interacción más complicada para los elementos inclinados. Por tanto, para los pórticos se tendrán en cuenta los esfuerzos normales en los elementos en la medida en que éstos afecten a la flexión en otros elementos. En general, los valores del momento flector M, del esfuerzo cortante F y del esfuerzo normal T, describirán por completo el estado en una sección transversal dada.

Antes de discutir las consecuencias más generales de la ecuación (1.4), un sencillo ejemplo puede mostrar algunas de sus características. Consideremos una viga biempotrada de longitud l, figura 1.3, sometida a una carga w_0 repartida uniformemente por unidad de longitud. La ecuación (1.4) da:

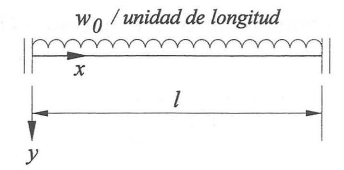


FIGURA 1.3

$$M = \frac{1}{2} w_0 x^2 + Ax + B \tag{1.5}$$

El primer término del lado derecho de la ecuación (1.5) depende únicamente de las cargas exteriores; la contribución de dichas cargas al momento flector total M varía con el cuadrado de la distancia x a lo largo de la viga. De hecho, esta contribución viene dada por los momentos flectores existentes en la ménsula estáticamente determinada, *isostática*, dibujada en la figura 1.4 (a) cuando está sometida a la misma carga exterior w_0. El correspondiente diagrama de momentos se muestra en la figura 1.4 (b).

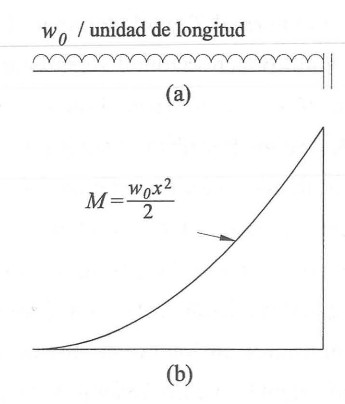


FIGURA 1.4

La diferencia entre la ménsula de la figura 1.4 y la viga biempotrada de la figura 1.3 es la eliminación de los apoyos en el extremo izquierdo de la viga biempotrada; este extremo tiene ahora libertad para descender y girar. Para devolver la viga a su estado original es preciso aplicar en dicho extremo izquierdo una fuerza

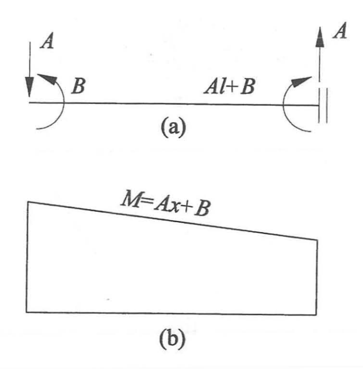


FIGURA 1.5

y un momento flector. Consideremos el sistema de fuerzas representado en la figura 1.5 (a). Es evidente que el momento flector producido por la fuerza A y el momento B en cualquier sección de la viga será de magnitud $Ax + B$; en la figura 1.5 (b) se ha dibujado el correspondiente diagrama de momentos flectores.

Si superponemos ahora los diagramas de momentos flectores de las figuras 1.4 (b) y 1.5 (b), es decir, si sumamos numéricamente dichos momentos en cada sección de la viga, el momento flector total en cualquier sección es precisamente el que viene dado por la ecuación (1.5). Este momento flector puede interpretarse como compuesto de dos partes: primero, la debida a la acción de las cargas exteriores sobre una viga análoga a la original, pero convertida en isostática por la eliminación de ciertos vínculos y, segundo, la debida a la introducción de aquellos vínculos que llevan a una distribución lineal de momentos. Estas dos contribuciones al momento flector total se conocen como *libres* y *reactantes* respectivamente.

Podemos llamar a las constantes A y B cantidades *redundantes* o hiperestáticas. No pueden determinarse sólo con las ecuaciones de equilibrio y, por tanto, la viga es hiperestática de segundo grado. Por supuesto, hay modos diferentes de especificar los *vínculos redundantes* de una viga, que se corresponden con las distintas maneras de convertir en isostática la viga original. Por ejemplo, la viga simplemente apoyada de la figura 1.6 (a) es isostática, y tiene el diagrama de momentos flectores de la figura 1.6 (b) cuando soporta la carga w_0. La viga sim-

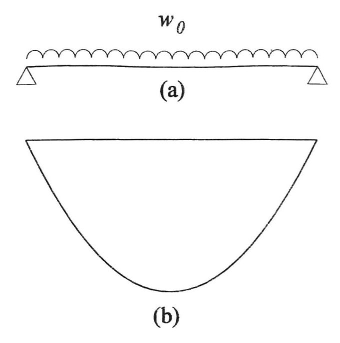


FIGURA 1.6

plemente apoyada se diferencia de la viga biempotrada por la ausencia de momentos en los extremos. Si introducimos estos momentos extremos como redundancias m_1 y m_2, junto con los esfuerzos cortantes asociados $(m_2 - m_1)/l$, tal y como aparece en la figura 1.7 (a), entonces obtenemos la línea reactante o de cierre de la figura 1.7 (b). (Nótese que las figuras 1.5 (b) y 1.7 (b) son idénticas excepto en las cantidades que especifican los momentos reactantes.)

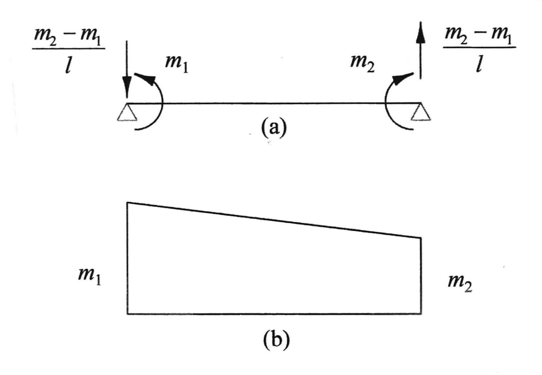


FIGURA 1.7

Volviendo a la ecuación (1.4), puede afirmarse de manera general que el momento flector de cualquier sección transversal de un elemento es la suma de dos componentes. La primera es el momento flector libre obtenido haciendo cero el número suficiente de redundancias de forma que la estructura se convierte en isostática. La segunda componente, es el momento flector reactante que se calcula exclusivamente a partir de valores arbitrarios de las redundancias; los momentos

reactantes varían siempre linealmente a lo largo del elemento. Podemos reescribir la ecuación (1.4) en la forma

$$M = M_w + \alpha_1 m_1 + \alpha_2 m_2 \tag{1.6}$$

donde M_w es el momento flector libre ($\iint w \, dx \, dx$), m_1 y m_2 son las redundancias, y α_1 y α_2 son funciones lineales de x. La expresión ($\alpha_1 m_1 + \alpha_2 m_2$) reemplaza sin pérdida alguna de generalidad a la expresión ($Ax + B$) de la ecuación (1.4); las redundancias A y B simplemente se han expresado de una manera diferente.

Hasta el momento se ha tratado exclusivamente de un único elemento. Cuando varios elementos están conectados entre sí, la estructura resultante puede tener cualquier número de redundancias, digamos N, dependiendo del número de elementos y de la forma en que se realizan las uniones. De manera completamente general, podemos escribir el momento flector en cualquier sección de la estructura como

$$M = M_w + \sum_{r=1}^{N} \alpha_r m_r \tag{1.7}$$

donde, como antes, las m_r son las redundancias y las α_r varían linealmente a lo largo de cada elemento. Los momentos isostáticos M_w se calculan haciendo cero todos los m_r, y hallando los momentos flectores de la estructura isostática resultante sometida a la acción de las cargas exteriores.

Las funciones lineales α_r son independientes de las cargas aplicadas, y dependen sólo de la configuración geométrica de la estructura. Por ejemplo, en la figura 1.7, el momento reactante en cualquier sección es $m_1(1 - x/l) + m_2(x/l)$, donde l es la longitud de la viga; por tanto, para esta viga, si elegimos m_1 y m_2 como redundancias, $\alpha_1 = (1 - x/l)$ y $\alpha_2 = x/l$.

Así, pues, en la ecuación (1.7) podemos calcular los momentos isostáticos M_w y las funciones α_r son conocidas. El momento flector total M puede así ser calculado en función de las redundancias m_r. *Todo el problema de la teoría de vigas y pórticos se reduce a la determinación de las redundancias.* Volviendo al sencillo ejemplo anterior, podemos superponer gráficamente las figuras 1.6 (b) y 1.7 (b)

para obtener el diagrama de momentos flectores totales de la figura 1.8. La forma general del diagrama de momentos flectores está ahora completamente definida; la solución completa se obtendrá cuando se conozcan los valores de m_1 y m_2.

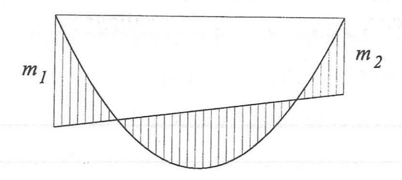


FIGURA 1.8

Las redundancias m_r y por tanto la solución completa de un problema estructural, no pueden obtenerse a partir de las ecuaciones de equilibrio exclusivamente. Es preciso considerar también la deformación de la estructura. La ecuación (1.7) es completamente general, y no se ha hecho mención alguna de la ley de deformaciones para el material de la estructura. Así, el análisis realizado hasta ahora es válido tanto para elementos elásticos como anelásticos. Cualquiera que sea el material, los momentos flectores de la estructura pueden expresarse como la suma lineal de momentos libres debidos a la carga y momentos reactantes debidos a las redundancias. Esta superposición de sistemas de fuerzas es una consecuencia de la hipótesis de pequeñas deformaciones. La ecuación (1.7) puede resumirse en las siguientes afirmaciones:

Los momentos flectores M están en *equilibrio* con las cargas exteriores W_i.
Los momentos flectores M_w están en *equilibrio* con las cargas exteriores W_i.
Los momentos flectores $\alpha_r\, m_r$ están en *equilibrio* con una carga exterior nula. (1.8)

Estas afirmaciones tienen una importancia crucial en el análisis de estructuras. Como se verá, dado que los momentos flectores redundantes están en equili-

brio con una carga exterior nula sobre la estructura, éstos pueden considerarse como momentos *residuales* o de *auto-solicitación*.

El símbolo W_i para las cargas exteriores representa todas las cargas que actúan sobre la estructura, y puede incluir tanto cargas puntuales como repartidas. En gran parte de la exposición que sigue las cargas se consideran como puntuales, sin pérdida de generalidad, y es conveniente analizar ahora el efecto de las cargas puntuales sobre las ecuaciones básicas.

Cargas puntuales

Si sólo actúan cargas puntuales sobre las estructuras, entonces, en la ecuación (1.3) w es en general cero, salvo en los puntos de aplicación de la carga. Supongamos que reemplazamos una carga puntual W_i por una carga uniforme w_i repartida sobre una pequeña distancia Δl, de modo que $w_i\ \Delta l = W_i$, cuando Δl tiende a cero (véase la figura 1.9). A partir de las ecuaciones (1.2) y (1.3), si se realiza la integración para incluir la carga W_i,

$$F_{x_i+\Delta l} - F_{x_i} = \left[\frac{dM}{dx}\right]_{x_i}^{x_i+\Delta l} = \int_{x_i}^{x_i+\Delta} w\, dx = w_i \Delta l = W_i \tag{1.9}$$

Por tanto, el esfuerzo cortante sufre un «salto» de W_i en el punto de aplicación de la carga puntual, y la misma discontinuidad se produce en la pendiente del diagrama de momentos flectores. Además, la pendiente del diagrama de momentos

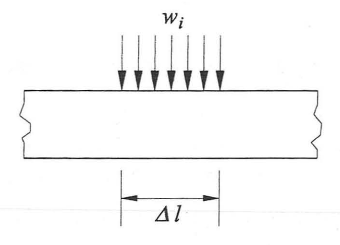


FIGURA 1.9

flectores es constante (con valores diferentes) a cada lado de la carga puntual. El diagrama de momentos libres de una estructura sometida a cargas puntuales está compuesto por líneas rectas, con discontinuidades de la pendiente en los puntos de aplicación de las cargas (y en las uniones con otros elementos). Dado que las líneas reactantes son también rectas, el diagrama de momentos flectores totales de una estructura cargada con cargas puntuales está también formado únicamente por líneas rectas.

Diagramas de momentos flectores reactantes

Se ha visto que las líneas reactantes son rectas cuando el elemento considerado del pórtico es, a su vez, recto. Consideremos la viga continua de cinco tramos de la figura 1.10 (a); supondremos que los extremos de la viga están empotrados. El diagrama de momentos reactantes de la viga estará constituido por líneas rectas y tomará la forma general de la figura 1.10 (b). El diagrama varía linealmente en

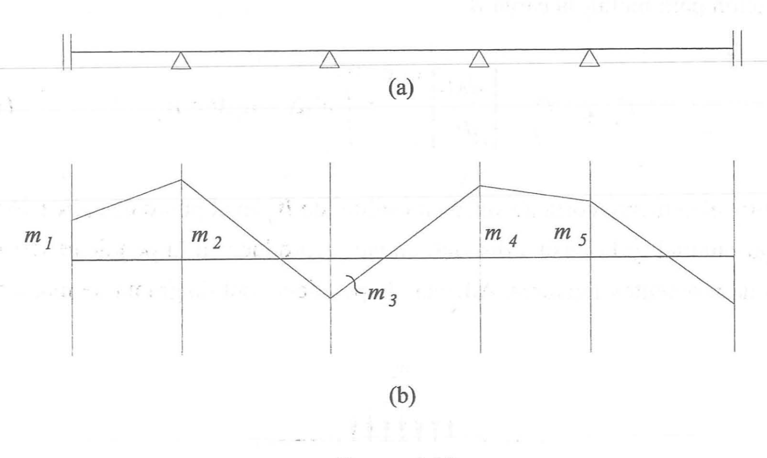


FIGURA 1.10

cada tramo de la viga entre los apoyos, y puede verse que estará completamente definido si las seis cantidades m_1 a m_6 son conocidas. Estas seis cantidades representan las seis redundancias de la viga, y su cálculo para una carga exterior dada definirá por completo la distribución de momentos flectores en la viga.

Puede verse, también, que el diagrama de la figura 1.10 (b) satisface las condiciones de equilibrio. Los momentos flectores son continuos sobre los apoyos de manera que no se producen saltos de momentos en la viga.

Obsérvese que la forma general de la línea reactante no se ve afectada por el modo en que el pórtico se haga isostático con el fin de calcular los momentos libres. Como un sencillo ejemplo, ya se vio que las figuras 1.5 (b) y 1.7 (b) tenían una forma idéntica, aunque la primera se había obtenido al convertir la viga biempotrada en una ménsula, mientras que la segunda se había obtenido al convertirla en una viga simplemente apoyada. Los *valores* reales de las redundancias dependerán de la elección de la estructura isostática, de manera que al superponer estos valores a los momentos flectores libres se obtenga una solución correcta.

Otro ejemplo se muestra en la figura 1.11. El diagrama reactante de un pórtico rectangular biempotrado debe tener la forma general mostrada en la figura 1.11 (b). Los momentos reactantes en los puntos cardinales son m_A, m_B, m_D y m_E, y el diagrama varía linealmente entre dichos valores; así, si los cuatro valores son conocidos, el diagrama está completamente definido. En este caso, como se verá más adelante, el pórtico tiene tres redundancias, de manera que los cuatro momentos m_A a m_E no son completamente independientes; sólo se pueden fijar tres, habiendo de hallar el cuarto en función de esos tres. Este ejemplo se trata con más detalle en la página 23; puede demostrarse que $(m_B - m_A) = (m_D - m_E)$. Así, si elegimos m_A, m_B y m_D para representar los vínculos hiperestáticos, entonces

$$m_E = m_A - m_B + m_D.$$

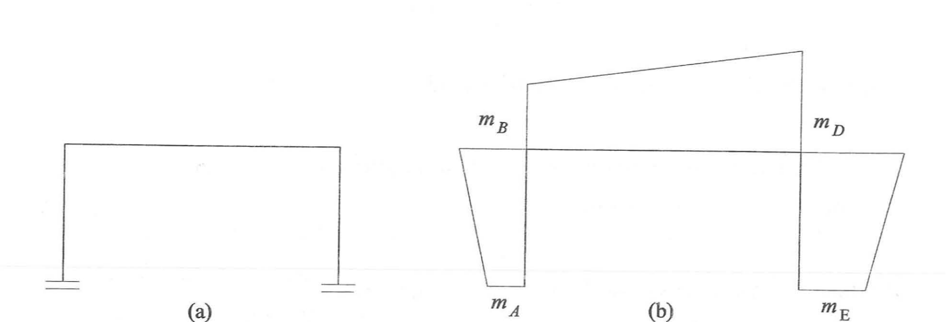


FIGURA 1.11

Deformación

Habiendo escrito la ecuación de equilibrio, el segundo enunciado que se precisa en la teoría de estructuras es el de *compatibilidad de deformaciones*. Expresada en forma general, la ecuación de compatibilidad sólo dice que las uniones entre los elementos de la estructura, y su naturaleza, deben mantenerse, como quiera que la estructura en su conjunto se deforme. Además, si se especifican ciertas *condiciones de contorno*, por ejemplo, que una viga descansa sobre un cierto número de apoyos, entonces esas condiciones deben cumplirse cuando la estructura se deforma.

Consideremos un elemento recto AB, figura 1.12, deformado en virtud de alguna causa exterior no especificada en la forma $A'B'$. El elemento flecta de manera continua con una curvatura variable κ; además, puede haber discontinuidades de *articulación* θ en los extremos o a lo largo del elemento. Estas deformaciones conducen a descensos o flechas variables y a lo largo del elemento.

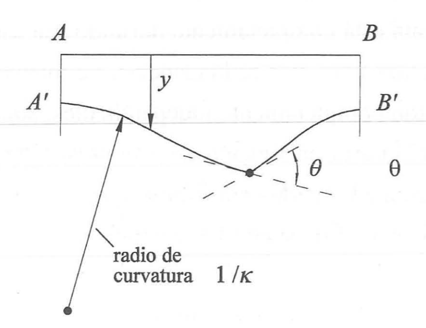


FIGURA 1.12

Entonces, el enunciado de compatibilidad es:

Las flechas y son compatibles con las curvaturas κ y las discontinuidades de articulación θ. (1.10)

Más brevemente, el conjunto (y, κ, θ) es compatible.

La curvatura continua variable κ puede, por supuesto, expresarse analíticamente en función de las flechas y; la expresión completa viene dada por:

$$\kappa = \frac{\dfrac{d^2y}{dx^2}}{\left\{1 + \left(\dfrac{dy}{dx}\right)^2\right\}^{3/2}} \tag{1.11}$$

Ahora bien, se ha supuesto que el término *dy/dx*, la variación de la pendiente de los elementos, es pequeño, de modo que, muy aproximadamente

$$\kappa = \frac{d^2y}{dx^2} \tag{1.12}$$

El convenio de signos elegido en las ecuaciones (1.11) y (1.12) es tal que a una curvatura positiva κ corresponde un momento flector positivo M.

Condiciones de contorno

El valor de la flecha y puede estar sometido a ciertas restricciones debido a la forma en que apoya el pórtico. Por ejemplo, en un apoyo simple que impide cualquier descenso (desplazamiento) en ese apoyo, $y = 0$. Analógamente, en un extremo empotrado que impide cualquier giro, $dy/dx = 0$. No hay restricciones ni para y ni para dy/dx en el extremo libre de un elemento. Éstos son ejemplos de condiciones de contorno especificadas en función de deformaciones o desplazamientos.

Algunas condiciones de contorno se especifican en función de las cargas. En el extremo libre de una ménsula, tanto el esfuerzo cortante como el momento flector tienen que ser cero. Condiciones de contorno mixtas se producen en el extremo de una viga que descansa sobre un apoyo simple. No sólo se requiere que el descenso de la viga sea cero, que es una condición de desplazamiento, también se requiere que el momento flector sea cero, que es una condición de carga.

En general, el conjunto de la estructura está sometido a ciertas condiciones de contorno. Para una parte de la estructura los desplazamientos son conocidos, y

sobre la parte restante las cargas son conocidas. Habitualmente es conveniente hacer que las distribuciones de equilibrio de los momentos flectores satisfagan las condiciones de carga del contorno. Así los enunciados (1.8) deben completarse con las palabras: «y satisfacer las condiciones de contorno prescritas.» (En ocasiones resulta útil trabajar con distribuciones de equilibrio de momentos flectores que, individualmente, *no* satisfacen las condiciones de carga del contorno.) Si no se hace mención de las condiciones de contorno, se supondrá que la distribución de equilibrio satisface aquéllas.

Análogamente, se supone habitualmente que un conjunto de deformaciones compatible satisface las condiciones de contorno de desplazamiento. Una excepción importante surge de la consideración de las discontinuidades de articulación y, en particular, de la consideración de los mecanismos.

Mecanismos y redundancias

La consideración de mecanismos es importante no sólo para el análisis del colapso plástico, sino también para plantear las ecuaciones de equilibrio. El colapso plástico se discute en el capítulo 3, y el planteamiento de las ecuaciones de equilibrio en la siguiente sección sobre «Trabajo Virtual». El enunciado (1.10) se escribió abreviadamente en la forma: el conjunto (y, κ, θ) es compatible. Si todas las curvaturas κ son cero para una determinada deformación del pórtico, entonces todos los elementos del pórtico permanecerán rectos durante un desplazamiento dado, y las flechas y se producirán por rotaciones θ en ciertas secciones concretas del pórtico, las articulaciones. Así el pórtico de la figura 1.11 (a) puede ser deformado en la forma dibujada en la figura 1.13 mediante la inserción de cuatro articulaciones. La rotación en cada articulación es, para este modo de deformación, numéricamente igual a un valor ϕ; los signos de las rotaciones en las articulaciones indicadas en la figura corresponden a articulaciones que alternativamente se abren y cierran. Si imaginamos que las articulaciones están «oxidadas», de manera que un momento se opone a la rotación, entonces, visto desde el interior del pórtico, un momento flector positivo que actúa sobre un elemento estaría asociado con una rotación de la articulación positiva, y un momento flector

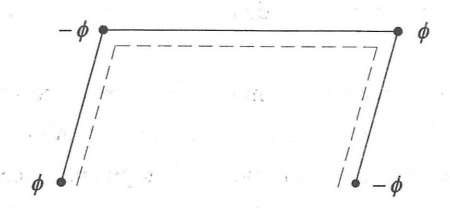


FIGURA 1.13

negativo con una rotación negativa. (Si se estudian pórticos más complejos, el concepto de momento flector positivo o negativo pierde sentido. Un momento flector se considerará positivo si produce compresión de un elemento en la cara adyacente a la línea de puntos, tal y como se muestra en la figura 1.13. Líneas de puntos similares se dibujarán en figuras posteriores; en todos los casos, el signo de una rotación de articulación concuerda con el signo del momento flector en dicha articulación.)

Alternativamente, si las articulaciones se imaginan sin rozamiento, es evidente que el pórtico de la figura 1.13 no es ya una estructura sino un *mecanismo*.

Puede verse a partir de simples consideraciones geométricas, que todas las rotaciones de las articulaciones son numéricamente iguales, de modo que sólo se necesita un parámetro ϕ para definir el movimiento del mecanismo. El mecanismo tiene, por tanto, un *grado de libertad*. Si se hubieran insertado sólo tres articulaciones sin rozamiento en el pórtico original, la deformación no sería posible, y el pórtico seguiría siendo una estructura capaz de resistir cargas.

Este tipo de estructura triarticulada es isostática. El hecho de que se necesiten tres articulaciones sin rozamiento para transformar el pórtico original en un pórtico isostático, se debe a que aquél presenta tres redundancias. En general, si un pórtico tiene N redundancias, la inserción de N articulaciones sin rozamiento, adecuadamente elegidas, lo convertirá en un pórtico isostático, mientras que la inserción de $(N + 1)$ articulaciones convertirá el pórtico en un *mecanismo regular* de un grado de libertad. Así pues, la consideración de posibles mecanismos nos

puede llevar a determinar el número de redundancias o vínculos hiperestáticos de un pórtico dado.

Este tipo de enfoque por mecanismos no tiene por qué ser necesariamente el mejor método de hallar el número de redundancias; en general, se podrá hacer mejor por consideraciones de equilibrio. En la siguiente sección de este capítulo se demuestra que hay una correspondencia exacta entre ecuación de equilibrio y mecanismo, de modo que, cualquiera que sea el método utilizado, la base analítica es la misma. A la hora de determinar las redundancias a partir de consideraciones de equilibrio, el punto de partida es que es preciso especificar tres cantidades en cada sección transversal, el momento flector, el esfuerzo cortante y el esfuerzo normal. La inserción de una articulación sin rozamiento en una cierta sección transversal equivale a hacer cero el momento flector en dicha sección; sin embargo, esfuerzos cortantes y normales sí pueden transmitirse a través de la articulación. Así, la inserción de cada articulación en un pórtico hiperestático reduce en uno el número de redundancias.

Como alternativa, el pórtico simple de la figura 1.11 (a) puede hacerse isostático cortándolo completamente por la mitad, digamos por el centro de la viga. Las dos mitades del pórtico serán ménsulas isostáticas. El corte ha destruido las tres solicitaciones (actions) internas (esfuerzo normal, esfuerzo cortante y momento flector) en el centro de la viga; los valores de T, F y M se han hecho cero para el pórtico cortado. Para volver al pórtico original hay que hallar T, F y M, de modo que el pórtico tiene tres redundancias.

Dejando a un lado por el momento las consideraciones de equilibrio, en la figura 1.14 (b) se ha dibujado otro posible mecanismo para el pórtico; para poder comparar, se ha repetido el mecanismo de la figura 1.13 en la figura 1.14 (a). Como se verá sólo tres articulaciones se han empleado en el mecanismo tipo viga, siendo éste un importante ejemplo de *mecanismo parcial*. El pórtico de la figura 1.14 (b) tiene una redundancia y, al mismo tiempo, contiene un mecanismo de un grado de libertad que afecta sólo a parte del pórtico. Tres articulaciones en un elemento recto formarán un mecanismo, al menos para movimientos infinitesimales. Grandes movimientos del mecanismo de viga de la figura 1.14 (b) implicarán, por supuesto, un movimiento hacia dentro de las columnas que aquí se han supuesto rígidas. Este tipo de mecanismo

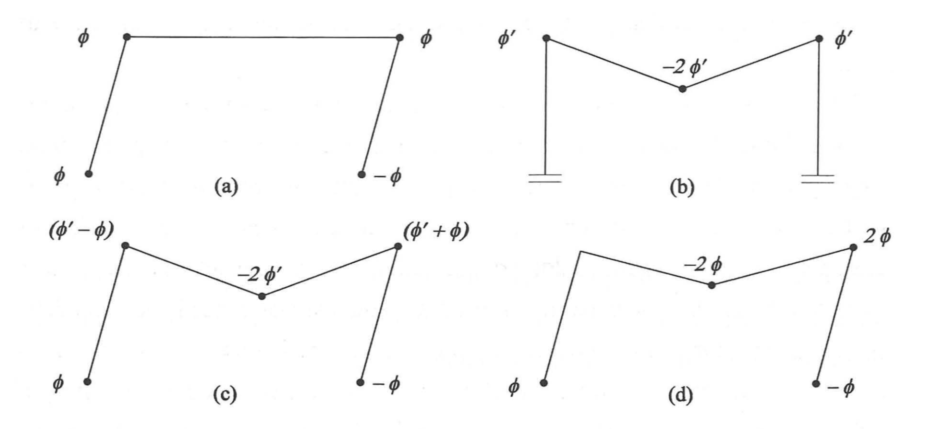


FIGURA 1.14

de viga resulta conveniente para el estudio de vigas continuas, pero también es útil en el análisis de pórticos.

Los mecanismos pueden superponerse; si se suman las rotaciones de las articulaciones de las figuras 1.14 (a) y (b), entonces se obtiene el mecanismo de dos grados de libertad de la figura 1.14 (c). Los dos grados de libertad están especificados por los valores de ϕ y ϕ'. Si elegimos ϕ igual a ϕ' desaparece una de las cinco articulaciones de la figura 1.14 (c), y el mecanismo particular resultante de un grado de libertad se ha dibujado en la figura 1.14 (d). Este último mecanismo, por tanto, no es *independiente* de los mostrados en las figuras 1.14 (a) y (b); de hecho, cualquiera de los mecanismos puede obtenerse por combinación de los otros dos en proporciones adecuadas. La combinación de mecanismos se discutirá más adelante en este capítulo y también en el capítulo 3.

Trabajo virtual

La ecuación básica de equilibrio (1.3) y el enunciado básico de compatibilidad (1.10) pueden relacionarse mediante la ecuación del trabajo virtual. Supongamos

que multiplicamos ambos lados de la ecuación (1.3) por una cierta función $y(x)$, de manera que

$$wy = \frac{d^2M}{dx^2}y \tag{1.13}$$

La función y permanecerá por el momento indefinida, pero supondremos que satisface los requisitos de continuidad y diferenciabilidad necesarios para la integración de la ecuación (1.13), de modo que

$$\int wy\,dx = \int \frac{d^2M}{dx^2}y\,dx \tag{1.14}$$

Integrando por partes dos veces, puede verse que

$$\int wy\,dx = \int M\frac{d^2y}{dx^2}dx + \left[y\frac{dM}{dx} - M\frac{dy}{dx}\right] \tag{1.15}$$

donde la expresión entre corchetes debe calcularse para los límites de integración.

Supongamos ahora que

(i) el conjunto en equilibrio (w, M) satisface las condiciones de equilibrio para un pórtico dado;
(ii) la función y representa un conjunto de desplazamientos impuesto al pórtico que también satisface las condiciones de contorno, de modo que (y, κ) es un conjunto de desplazamientos compatible ($\kappa = d^2y/dx^2$, ecuación (1.12));
(iii) la integración se extiende a todo el pórtico.

Según la afirmación (iii), el término entre corchetes debe ser calculado en los extremos de los elementos del pórtico. Para las tres condiciones simples de un extremo libre, articulado o empotrado, pueden escribirse las siguientes condiciones:

$$\left.\begin{array}{lll}\text{Extremo libre:} & \left.\begin{array}{r} M = 0 \\ F = \dfrac{dM}{dx} = 0 \end{array}\right\} \\ \text{Extremo articulado:} & \left.\begin{array}{r} M = 0 \\ y = 0 \end{array}\right\} \\ \text{Extremo empotrado:} & \left.\begin{array}{r} y = 0 \\ \dfrac{dy}{dx} = 0 \end{array}\right\} \end{array}\right\} \tag{1.16}$$

Para todas estas condiciones, el término entre corchetes de la ecuación (1.15) se anula, de modo que

$$\oint wy\, dx = \oint M\kappa\, dx \tag{1.17}$$

Para otras condiciones de extremo, por ejemplo un apoyo elástico, la ecuación (1.17) sigue siendo válida, siempre que las reacciones se introduzcan en la ecuación como cargas exteriores.

La ecuación (1.17) es la ecuación básica del trabajo virtual, que relaciona un conjunto en equilibrio (w, M) con un conjunto compatible (y, κ). Nótese que, como resulta obvio de su deducción, ambos conjuntos no tienen por qué estar relacionados. Los momentos flectores M pueden ser los momentos flectores reales en un pórtico que soporta las cargas w, o bien cualquier conjunto de momentos flectores en equilibrio que corresponden a la expresión general (1.7). Analógamente, el conjunto (y, κ) puede representar el estado de deformación real del pórtico, o bien cualquier conjunto compatible de desplazamientos impuestos.

La anterior «demostración» de la ecuación del trabajo virtual es realmente un esbozo, en el que están implícitas algunas suposiciones simplificadoras. Por ejemplo, es preciso tener en cuenta las uniones entre los distintos elementos del pórtico, pero puede demostrarse que estas uniones no alteran la ecuación (1.17) en ninguna forma.

La ecuación puede ampliarse para incluir tanto cargas concentradas como el efecto de bruscos cambios en la curvatura κ (esto es, discontinuidades de articulación); en su forma ampliada:

$$\Sigma W_i y_i + \oint wy\, dx = \Sigma M_k \theta_k + \oint M\kappa\, dx \qquad (1.18)$$

En el lado izquierdo, el sumatorio comprende todas las cargas puntuales W_i, y la integral se extiende a todas las otras cargas; en el lado derecho, el sumatorio incluye todas las discontinuidades de articulación θ_k (en las que los valores correspondientes del momento flector M son M_k), y la integral se extiende a todo el resto del pórtico.

Ecuaciones de equilibrio deducidas de los mecanismos

En la exposición que sigue se considerarán mecanismos (y, θ) en los que la curvatura κ entre articulaciones es cero. Sin pérdida de generalidad, los ejemplos incluirán sólo cargas puntuales, de modo que la ecuación (1.18) puede escribirse en la forma adecuada:

$$\Sigma W_i y_i = \Sigma M_k \theta_k \qquad (1.19)$$

Para ver cómo se puede emplear la ecuación (1.19) para determinar las ecuaciones de equilibrio, consideremos de nuevo el pórtico simple dibujado en la figura 1.15 (a). El diagrama completo de momentos flectores del pórtico tiene la forma dibujada en la figura 1.15 (b). Dado que sobre el pórtico sólo actúan cargas puntuales (V y H), el diagrama de momentos está formado por líneas rectas; por tanto, conocidos los valores cardinales M_A, M_B, ... M_E, puede dibujarse el diagrama completo.

Como se ha visto, el pórtico biempotrado tiene tres redundancias; por tanto, los cinco valores cardinales de los momentos flectores no pueden fijarse de manera arbitraria. De hecho, si se especifican tres valores, los otros dos tienen que ser calculables en función de aquéllos. Deben existir, por consiguiente, dos

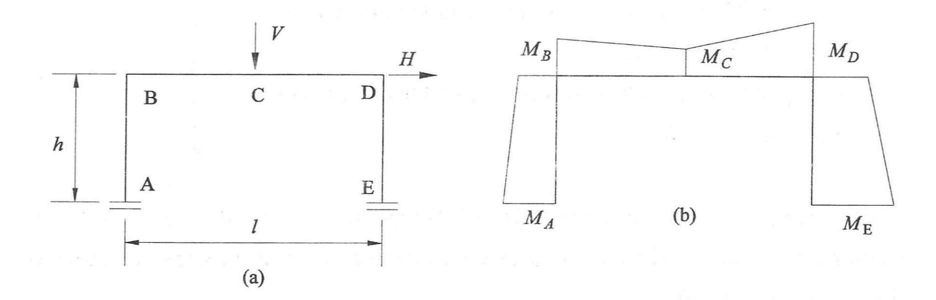


FIGURA 1.15

ecuaciones independientes de equilibrio que relacionen los cinco valores del momento flector con los valores de las cargas exteriores. Podemos deducir ventajosamente estas ecuaciones de equilibrio considerando dos mecanismos independientes y usando la ecuación del trabajo virtual.

Al escribir la ecuación del trabajo virtual, se tomará como conjunto en equilibrio los momentos reales en el pórtico producidos por las cargas V y H. Las cantidades desconocidas elegidas para la solución del problema son por tanto «fuerzas», los momentos flectores, en vez de deformaciones. El conjunto compatible empleado en la ecuación del trabajo virtual será un conjunto hipotético de deformaciones correspondientes a un mecanismo, como se verá inmediatamente. El trabajo virtual puede aplicarse de esta forma si elegimos esfuerzos variables como cantidades desconocidas. Sin embargo, la ecuación puede usarse también para hallar variables de deformación. En este caso, el conjunto compatible serán las deformaciones *reales* del pórtico, mientras que el conjunto en equilibrio será cualquier distribución conveniente de momentos flectores en el pórtico. Este uso alternativo del trabajo virtual se explica en el Capítulo 2.

Volviendo al pórtico simple, las figuras 1.16 (a) y (b) muestran de nuevo dos mecanismos independientes, que usaremos para deducir dos ecuaciones de equilibrio mediante la ecuación (1.19). Utilizando el mecanismo de movimiento lateral, pueden escribirse las dos ecuaciones siguientes:

$$\left.\begin{array}{l}\text{Las cargas } (V, H) \text{ están en equilibrio con los momentos} \\ \quad (M_A, M_B, M_C, M_D, M_E) \\ \text{Los desplazamientos } (0, h\phi) \text{ son compatibles con los giros} \\ \quad (\phi, -\phi, 0, \phi, -\phi)\end{array}\right\} \qquad (1.20)$$

Nótese que la primera afirmación de (1.20) representa el estado «real» de la estructura; la segunda afirmación representa una deformación hipotética. Aplicando la ecuación (1.19),

$$(V)(0) + H(h\phi) = (M_A)(\phi) + (M_B)(-\phi) + M_C(0) + (M_D)(\phi) + (M_E)(-\phi)$$

esto es,

$$Hh = M_A - M_B + M_D - M_E \qquad (1.21)$$

En el primer enunciado (1.20) hay otras cargas exteriores que actúan en el pórtico además de V y H; se trata de las reacciones en sus apoyos. No obstante,

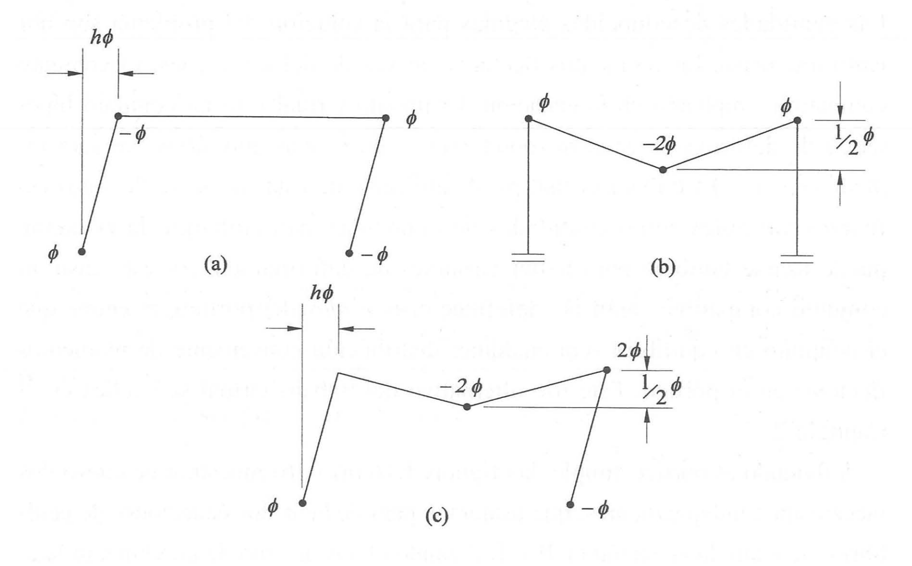


FIGURA 1.16

dado que los apoyos del pórtico no tienen permitido el movimiento en el mecanismo de la figura 1.16 (a), no aparece ningún término correspondiente a las reacciones en los apoyos al lado izquierdo de la ecuación (1.21). Si se considera el mecanismo de la figura 1.16 (b), en lugar del mecanismo de movimiento lateral, a la hora de dar un conjunto hipotético de desplazamientos, entonces la ecuación (1.19) da

$$\frac{Vl}{2} = M_B - 2M_C + M_D \tag{1.22}$$

Las ecuaciones (1.21) y (1.22) son obviamente independientes y, por consiguiente, pueden usarse como las dos ecuaciones de equilibrio buscadas. Estas ecuaciones tienen que verificarse cualquiera que sea el estado del pórtico, elástico o plástico. Nótese que las ecuaciones relacionan los valores de los cinco momento flectores cardinales, como se pretendía, y que la elección de los momentos redundantes está, de hecho, limitada. Por ejemplo, M_B, M_C y M_D no pueden elegirse de manera arbitraria, ya que, entonces, se incumpliría la ecuación (1.22); si se especifican dos de ellos, entonces el tercero queda determinado y se puede calcular inmediatamente.

El lector puede querer verificar las ecuaciones (1.21) y (1.22) deduciéndolas a partir de consideraciones normales de equilibrio estático. Por ejemplo, la ecuación (1.21) puede escribirse a partir de la condición de que la suma de los esfuerzos cortantes que actúan en ambos pilares tiene que ser igual a la fuerza horizontal H.

El mecanismo de la figura 1.16 (c) se ha obtenido superponiendo los mecanismos de las figuras 1.16 (a) y (b) (compárese con la figura 1.14). Tomando las rotaciones en las articulaciones de la figura 1.16 (c) y los desplazamientos correspondientes como el conjunto de deformaciones compatibles, entonces la ecuación (1.19) del trabajo virtual da

$$Hh + \frac{Vl}{2} = M_A - 2M_C + 2M_D - M_E \tag{1.23}$$

Se trata de una tercera ecuación de equilibrio; sin embargo, no contiene más información de la ya contenida en las ecuaciones (1.21) y (1.22). Es más, si sumamos estas dos últimas ecuaciones obtendremos la ecuación (1.23).

Así, la suma de dos mecanismos independientes, figuras 1.16 (a) y (b), para obtener un tercer mecanismo, figura 1.16 (c), es precisamente equivalente a la suma de dos ecuaciones de equilibrio, (1.21) y (1.22), para obtener una tercera ecuación de equilibrio, (1.23). Hay una correspondencia biunívoca entre mecanismo y ecuación de equilibrio. Además, si se descubre que un pórtico dado requiere, digamos, dos ecuaciones de equilibrio independientes que relacionen los valores de los momentos flectores a lo largo del pórtico, entonces, el problema puede transformarse en encontrar dos mecanismos independientes, a partir de los que pueden obtenerse las ecuaciones de equilibrio.

Los mecanismos independientes sirven también para obtener una posible distribución de momentos flectores residuales en el pórtico. Así, si en la figura 1.15 hacemos las cargas exteriores V y H igual a cero, las ecuaciones (1.21) y (1.22) dan

$$\left.\begin{aligned} 0 &= m_A - m_B \qquad\quad + m_D - m_E \\ 0 &= \qquad\quad m_B - 2m_C + m_D \end{aligned}\right\} \qquad (1.24)$$

donde m_k es ahora el momento residual en la sección k del pórtico. La línea reactante más general tiene que satisfacer las ecuaciones (1.24); la segunda de estas ecuaciones establece simplemente que la línea reactante de la viga tiene que ser recta, mientras que la primera indica que las pendientes de las líneas reactantes de los dos pilares tienen que ser iguales y de sentido contrario. La línea reactante más general se ha dibujado en la figura 1.17.

Como se habrá podido apreciar, al obtener las ecuaciones de equilibrio a partir de mecanismos de un grado de libertad, el parámetro que define el movimiento del mecanismo (esto es, ϕ en las figuras 1.16) desaparece de las ecuaciones, ya que todos los términos son múltiplos de este parámetro. A veces resulta útil trabajar con mecanismos de más de un grado de libertad. Por ejemplo, si consideramos la figura 1.14 (c), que muestra un mecanismo de dos grados de libertad

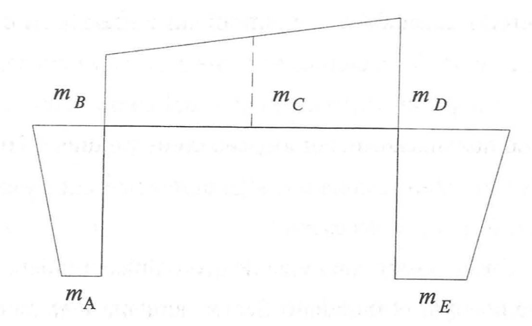


FIGURA 1.17

(de hecho, es el mecanismo más general posible si se sitúan las articulaciones sólo en los puntos cardinales), entonces la ecuación (1.19) da

$$H(h\phi) + V\left(\frac{l}{2}\phi'\right) = (M_A)(\phi) + (M_B)(\phi' - \phi) + (M_C)(-2\phi') + (M_D)(\phi + \phi') + (M_E)(-\phi) \qquad (1.25)$$

Podemos reordenar la ecuación en la forma

$$\phi(M_A - M_B + M_D - M_E - Hh) + \phi'\left(M_B - 2M_C + M_D - \frac{Vl}{2}\right) = 0 \qquad (1.26)$$

Ahora bien, como la ecuación (1.26) tiene que satisfacerse *cualquiera* que sean los valores de ϕ y ϕ', los términos entre paréntesis tienen que ser iguales a cero. Así, la ecuación (1.26) no es sino la forma general de las dos ecuaciones independientes de equilibrio (1.21) y (1.22).

Relación momento flector-curvatura

Hasta ahora la exposición ha sido completamente general; las ecuaciones que se han obtenido son válidas independientemente del material empleado en el pórti-

co. Los enunciados de equilibrio y compatibilidad son, de hecho, propiedades de la *forma* estructural y no del material. Sin embargo, para obtener la solución de un problema real se requiere un conocimiento del comportamiento del material. Dado que se ha supuesto que las deformaciones se producen únicamente como resultado de la flexión de los elementos, alguna relación entre momento flector y curvatura dará la información necesaria.

Si se realiza un ensayo sobre una viga de acero dulce, midiendo los valores de la curvatura a medida que el momento flector aumenta lentamente, se obtendrá una curva similar a la dibujada en trazo continuo en la figura 1.18. El comportamiento es el mismo independientemente de la forma en que la viga flecta; los momentos flectores positivos y negativos producen los mismos valores numéricos de la curvatura. Entre los puntos O y A de la curva, el material es elástico; la curvatura es proporcional al momento flector y, si se descarga la viga, ésta vuelve a su estado original. Si el momento crece, el comportamiento se vuelve no-lineal y anelástico; la descarga desde un punto como el P seguirá el camino dibujado a trazos en la figura 1.18, y cuando la viga está completamente descargada se observará una cierta curvatura residual.

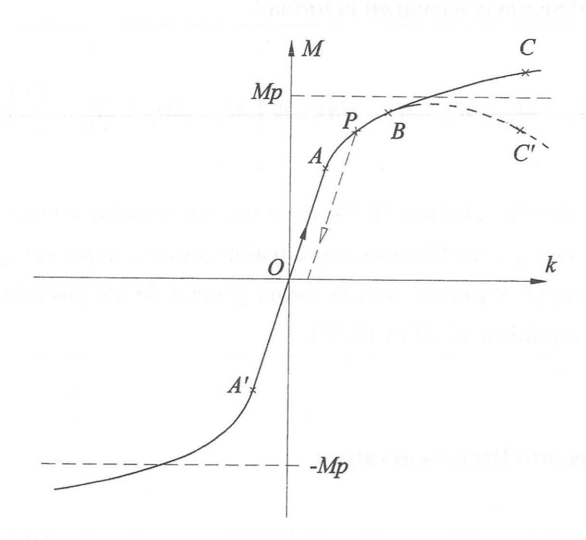


FIGURA 1.18

Si se incrementa el momento flector a partir del punto B del diagrama, en general, el material «se endurecerá» y valores lentamente crecientes del momento flector podrán ser soportados a curvaturas rápidamente crecientes. Si, sin embargo, el material es hormigón armado, hay una tendencia a que el momento flector alcance un valor máximo; a partir de ese instante el momento flector decrecerá para curvaturas cada vez mayores, como muestra la curva BC' en la figura 1.18. Este comportamiento no encaja fácilmente dentro del marco de la teoría plástica simple expuesta en el Capítulo 3, y se supondrá que no hay disminución del momento flector incluso para curvaturas muy grandes. Por tanto, la teoría plástica simple no puede aplicarse sin modificación a estructuras de hormigón armado.

La relación momento flector-curvatura se idealizará como aparece en la figura 1.19 (a). Esta curva tiene las mismas características básicas que la de la figura 1.18. Entre O y A, el comportamiento es enteramente elástico. A medida que el momento flector aumenta, el comportamiento es elasto-plástico, hasta que en B se alcanza el momento máximo. Este momento máximo se mantiene aunque la curvatura siga creciendo. La forma general de la curva dibujada en la figura 1.19 (a) satisface los requisitos de la teoría plástica simple; estos requisitos se discutirán en detalle más adelante (En algunos casos, resulta conveniente trabajar con una curva todavía más simple, la relación elástica-perfectamente plástica de la figura 1.19 (b), o incluso la relación rígida-perfectamente plástica mostrada en la figura 1.19 (c).)

Volviendo a la figura 1.19 (a), como se ha visto, el comportamiento *elástico* ocurre para pequeños valores del momento flector. El momento flector es proporcional a la curvatura, de manera que

$$M = B\kappa \tag{1.27}$$

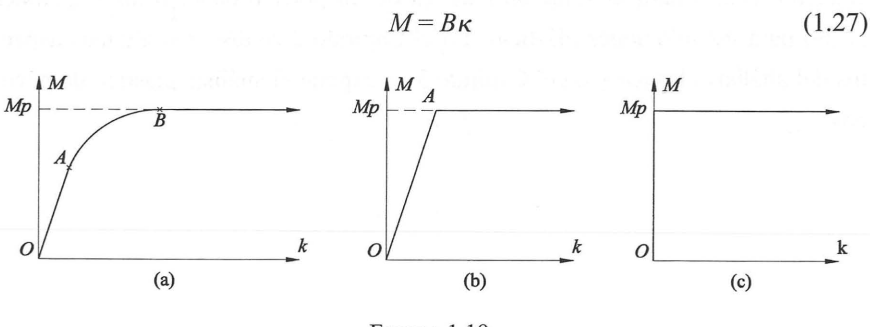


FIGURA 1.19

donde B es una constante. Ésta es la ecuación final necesaria para la resolución de pórticos elásticos. La ecuación (1.27) resulta probablemente más familiar en la forma $M = EI\, d^2y/dx^2$; dado que $\kappa = d^2y/dx^2$, ecuación (1.12), puede verse que la constante B es la *rigidez a flexión EI*.

La ecuación (1.27) es válida hasta un cierto valor del momento flector. Después sigue un intervalo elasto-plástico, y, finalmente, se produce un comportamiento *plástico ideal*, cuando la curvatura crece indefinidamente para un valor constante del momento flector, el *momento plástico último*. La sección de un elemento en la que actúa un momento plástico último recibe el nombre de *rótula plástica*, y se caracteriza por

$$M = M_p \qquad (1.28)$$

donde M_p es el valor de momento plástico último.

La curva de la figura 1.19 (a) puede definirse matemáticamente como sigue:

$$\left.\begin{aligned} -M_p < M < M_p, \ \frac{dM}{d\kappa} > 0 \\ |M| = M_p, \ \frac{dM}{d\kappa} = 0 \end{aligned}\right\} \qquad (1.29)$$

y éstas son las relaciones que deben ser satisfechas en el análisis de pórticos según la teoría plástica simple.

Así, a las ecuaciones de equilibrio y compatibilidad hay que añadir, bien la ecuación (1.27) para la solución elástica de un pórtico dado, o las relaciones (1.29) para las soluciones plásticas. En el Capítulo 2 se discuten algunos aspectos del análisis elástico y en el Capítulo 3 se expone el análisis plástico de pórticos.

2
Vigas y pórticos elásticos

El Capítulo 2 se ocupa de la flexión de estructuras cuyo comportamiento es lineal y elástico. El momento flector en un elemento es proporcional a la curvatura, y, como se verá, como consecuencia de esta proporcionalidad es posible *superponer* soluciones para un pórtico dado. Antes de discutir los aspectos más generales del análisis elástico lineal se expondrán algunos ejemplos para ilustrar la forma en que se usan las ecuaciones.

Solución por integración directa

Ejemplo 2.1. Consideremos la viga empotrada-apoyada de longitud l de la figura 2.1, que soporta una carga uniforme w_0. Siguiendo el análisis del capítulo anterior, la viga empotrada-apoyada puede hacerse isostática eliminando el apoyo, figura 2.2 (a), lo que conduce al diagrama de momentos libres o isostáticos de la figura 2.2 (c). El diagrama reactante se muestra en la figura 2.2 (d), en la que se ha denominado m a la cantidad desconocida. Tomando los ejes como se indica en la figura 2.1, el momento flector en cualquier sección transversal es

$$M_x = \frac{1}{2} w_0 x^2 - \frac{mx}{l} \tag{2.1}$$

y ésta es la ecuación de equilibrio de la viga.

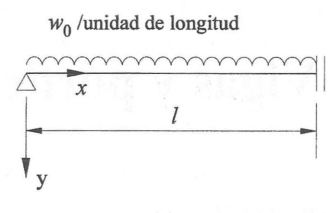


FIGURA 2.1

Sustituyendo en la ecuación (1.27), que relaciona el momento flector y la curvatura, llegamos a

$$B\,\frac{d^2y}{dx^2} = \frac{1}{2}\,w_0x^2 - \frac{mx}{l} \tag{2.2}$$

La ecuación (2.2) es una ecuación diferencial lineal de segundo orden que nos da las flechas y de la viga en cualquier sección transversal en función de la distancia x a lo largo de la viga. La forma de esta ecuación es típica de cualquier viga de una estructura porticada.

La condición de compatibilidad se ha aplicado, en un sentido elemental, al escribir la ecuación (2.2), puesto que la curvatura κ se ha supuesto que varía de forma continua y se ha sustituido por d^2y/dx^2; la relación lineal momento-curvatura

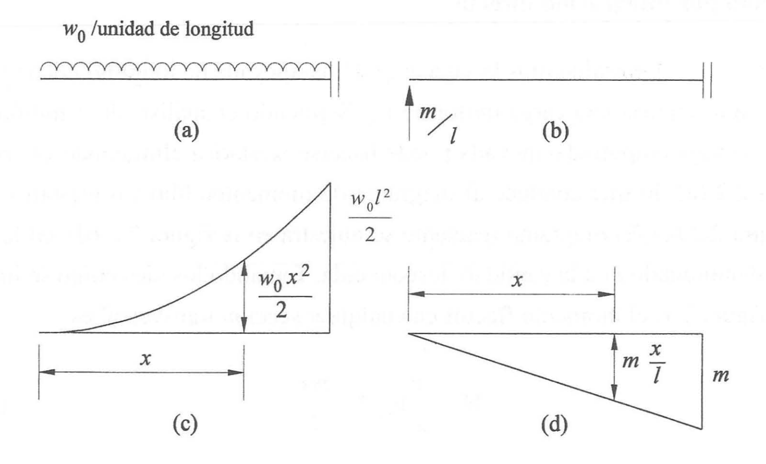


FIGURA 2.2

se ha introducido mediante la constante B. La ecuación satisface, por tanto, las condiciones de equilibrio y compatibilidad, y debe verificar las condiciones de contorno, para el problema dado.

Las condiciones de contorno son tres: el descenso de la viga tiene que ser cero en ambos extremos, y la pendiente de la viga tiene que ser cero en el extremo empotrado. Expresado matemáticamente,

$$\left.\begin{array}{l} x=0 \\ y=0 \end{array}\right\} \quad \left.\begin{array}{l} x=l \\ y=0 \end{array}\right\} \quad \left.\begin{array}{l} x=l \\ \dfrac{dy}{dx}=0 \end{array}\right\} \tag{2.3}$$

Las primeras dos condiciones en las expresiones (2.3) sirven para fijar la posición de la viga en el espacio: la viga descansa sobre dos apoyos. La tercera condición supone un vínculo adicional a la viga. De forma alternativa, la segunda y tercera expresión pueden considerarse que aseguran que la viga es una estructura, en este caso una ménsula; ahora, la primera condición impone un vínculo en el extremo izquierdo de la viga. La ecuación (2.2) contiene una incógnita, m, y su integración producirá dos constantes desconocidas. Las tres condiciones de contorno sirven, por tanto, para determinar las dos constantes de integración y el valor de m. Integrando la ecuación (2.2),

$$\left.\begin{array}{l} B\dfrac{dy}{dx}=\dfrac{w_0x^3}{6}-\dfrac{mx^2}{2l}+\alpha \\ By=\dfrac{w_0x^4}{24}-\dfrac{mx^3}{6l}+\alpha x+\beta \end{array}\right\} \tag{2.4}$$

donde α y β son constantes de integración. Aplicando las condiciones (2.3),

$$\left.\begin{array}{l} 0=\beta \\ 0=\dfrac{w_0l^4}{24}-\dfrac{ml^2}{6}+\alpha l+\beta \\ 0=\dfrac{w_0l^3}{6}-\dfrac{ml}{2}+\alpha \end{array}\right\} \tag{2.5}$$

de donde,

$$\left.\begin{aligned} m &= \frac{3}{8} w_0 l^2 \\ By &= \frac{w_0}{48} x(l+2x)(l-x)^2 \end{aligned}\right\} \qquad (2.6)$$

Este método de integración directa de la ecuación diferencial fundamental ha arrojado, pues, dos resultados. En primer lugar, se ha resuelto el problema estructural principal dado que se ha hallado el momento reactante desconocido m; en la figura 2.3 se ha dibujado el diagrama final de momentos flectores. En segundo lugar, la segunda de las ecuaciones (2.6) nos da la deformada de la viga, información que no siempre es necesaria en un análisis concreto. En lo que sigue, veremos que es posible determinar los valores de las redundancias (esto es, m en el ejemplo anterior) sin necesidad de calcular las flechas.

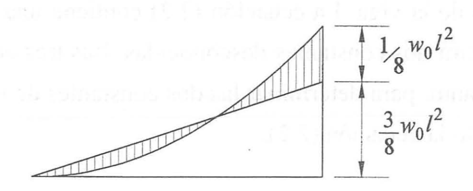


FIGURA 2.3

No obstante, el método de la integración directa es tan inmediato que puede usarse ventajosamente en la resolución de problemas sencillos. El siguiente ejemplo servirá para ilustrar esta técnica cuando hay discontinuidades en la carga.

Ejemplo 2.2. La viga continua de sección constante de la figura 2.4 descansa sobre tres apoyos, y tiene por tanto, una redundancia. Los diagramas libres y reactantes se han dibujado en la figura 2.5, construidos dividiendo la viga en dos vigas simplemente apoyadas. Los diagramas de cuerpo libre, que muestran el equilibrio de las fuerzas, se han representado en la figura 2.6. El origen de coor-

denadas se ha tomado en la figura 2.6 (a) en el extremo izquierdo de la viga, como es habitual; para esta parte de la viga,

$$B\,\frac{d^2y}{dx^2}=\frac{m}{l}\,x \tag{2.7}$$

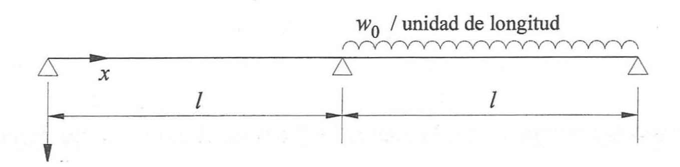


FIGURA 2.4

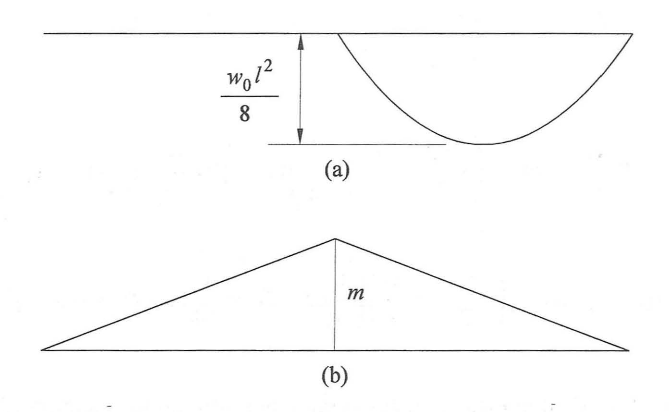


FIGURA 2.5

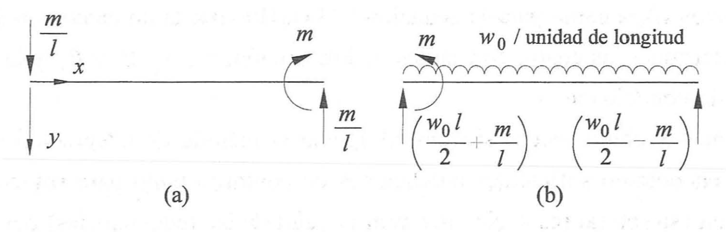


FIGURA 2.6

de donde, integrando,

$$B\frac{dy}{dx} = \frac{m}{2l}x^2 + \alpha_1 \tag{2.8}$$

$$By = \frac{m}{6l}x^3 + \alpha_1 x + \beta_1 \tag{2.9}$$

Considerando los mismos ejes, la ecuación diferencial para el vano derecho es

$$B\frac{d^2y}{dx^2} = m - \left(\frac{w_0 l}{2} + \frac{m}{l}\right)(x - l) + \frac{w_0}{2}(x - l)^2 \tag{2.10}$$

de donde,

$$B\frac{dy}{dx} = mx - \left(\frac{w_0 l}{2} + \frac{m}{l}\right)\left(\frac{1}{2}\right)(x - l)^2 + \frac{w_0}{6}(x - l)^3 + \alpha_2 \tag{2.11}$$

$$By = \frac{1}{2}mx^2 - \left(\frac{w_0 l}{2} + \frac{m}{l}\right)\left(\frac{1}{6}\right)(x - l)^3 + \frac{w_0}{24}(x - l)^4 + \alpha_2 x + \beta_2 \tag{2.12}$$

Las condiciones de contorno de estas ecuaciones son: en la ecuación (2.9), la flecha y tiene que ser cero para $x = 0$ y $x = l$, y en la ecuación (2.12), y tiene que ser cero para $x = l$ y $x = 2l$; además, para expresar la continuidad de la viga sobre el apoyo central, la pendiente de la viga para $x = l$ tiene que ser la misma tanto para la ecuación (2.8) como para la ecuación (2.11). Hay por tanto cinco condiciones para determinar las cuatro constantes de integración, α_1, α_2, β_1 y β_2, y la redundancia desconocida m.

De nuevo, como sucede siempre al aplicar el método de integración directa, hemos encontrado suficientes condiciones de contorno tanto para solucionar el problema estructural (es decir, encontrar el valor de las redundancias) como para calcular la función de las flechas (esto es, encontrar las constantes de integra-

ción). El método suministra siempre el exacto número de ecuaciones para calcular las cantidades desconocidas.

Sin embargo, este método es algo incómodo. Para una viga continua habría que escribir las ecuaciones diferenciales para cada vano y, después, las condiciones de continuidad (igualdad de pendiente y descenso) para garantizar que «concuerdan» las soluciones en los extremos de cada vano. El método de Macaulay para vigas continuas asegura automáticamente el cumplimiento de la condición de continuidad.

Método de Macaulay

La ecuación (2.10) puede reordenarse en la forma

$$B\frac{d^2y}{dx^2} = m\frac{x}{l} - \left(\frac{w_0 l}{2} + \frac{2m}{l}\right)[x-l] + \frac{w_0}{2}[x-l]^2 \qquad (2.13)$$

Si se ignoran los términos $[x - l]$, entre corchetes, resulta que la ecuación (2.13) es idéntica a la ecuación (2.7). En el método de Macaulay se escribe una única ecuación, similar a la ecuación (2.13), para toda la viga continua y los términos entre corchetes se ignoran *si son negativos*. La ecuación (2.13) tiene una interpretación física en relación con la figura 2.7. La figura 2.7 (a) muestra el diagrama de cuerpo o libre de la viga completa; compárese con el de la figura 2.6. La figura 2.7 (b) es el diagrama de cuerpo libre para una longitud x de la viga, donde se ha elegido un valor de x suficientemente grande para comprender todas las cargas y reacciones excepto las reacciones en el extremo derecho de la viga. Para mantener el equilibrio se han introducido un esfuerzo cortante F y un momento flector M_X en la sección de «corte»; tomando momentos puede comprobarse que el valor de M_X es precisamente el dado por la ecuación (2.13).

Integrando la ecuación (2.13),

$$By = \frac{mx^3}{6l} - \frac{1}{6}\left(\frac{w_0 l}{2} + \frac{2m}{l}\right)[x-l]^3 + \frac{w_0}{24}[x-l]^4 + \alpha x + \beta \qquad (2.14)$$

w_0 / unidad de longitud

$\frac{m}{l}$ $\left(\frac{w_0 l}{2}+\frac{2m}{l}\right)$ $\left(\frac{w_0 l}{2}-\frac{m}{l}\right)$

(a)

$w_0\,(x-l)$ F M_x

$\frac{m}{l}$ $\left(\frac{w_0 l}{2}+\frac{2m}{l}\right)$

(b)

FIGURA 2.7

y esta ecuación debe cumplir las siguientes condiciones de contorno

$$\left.\begin{array}{lll} x=0 & x=1 & x=2l \\ y=0 & y=0 & y=0 \end{array}\right\} \qquad (2.15)$$

Sustituyendo la primera de estas condiciones, y recordando que los términos entre corchetes se hacen cero cuando son negativos, se verá que $\beta = 0$. Análogamente, la segunda condición da

$$0=\frac{ml^2}{6}+\alpha l \qquad (2.16)$$

y la tercera condición da

$$0=\frac{4}{3}ml^2-\frac{1}{6}\left(\frac{w_0 l^4}{2}+2ml^2\right)+\frac{w_0 l^4}{24}+2\alpha \qquad (2.17)$$

de manera que, finalmente,

$$m = \frac{1}{16} w_0 l^2 \tag{2.18}$$

y

$$96By = -w_0 lx(l^2 - x^2) - 10w_0 l[x - l]^3 + 4w_0[x - l]^4 \tag{2.19}$$

Al interpretar la ecuación (2.19) puede verse que, para el primer vano $0 \leqslant x \leqslant l$,

$$96By = -w_0 lx(l^2 - x^2) \tag{2.20}$$

mientras que para el segundo vano, $l \leqslant x \leqslant 2l$, es de aplicación la ecuación (2.19) completa.

El método de Macaulay supone un ahorro de trabajo considerable, ya que el número de condiciones de contorno se reduce. No es necesario, como se hizo antes, escribir la ecuación diferencial básica en función del momento reactante m. Cualquier sistema adecuado en equilibrio puede servir para deducir la ecuación. Por ejemplo, en el diagrama de la figura 2.8 se eligió la reacción R en el apoyo izquierdo como redundancia; sencillas consideraciones estáticas nos dan los valores de las reacciones en los otros dos apoyos en función de R. La ecuación diferencial sería en este caso

$$B\frac{d^2y}{dx^2} = -Rx - \left(\frac{w_0 l}{2} - 2R\right)[x - l] + \frac{w_0}{2}[x - l]^2 \tag{2.21}$$

que, por supuesto, tiene la misma forma que la ecuación (2.13).

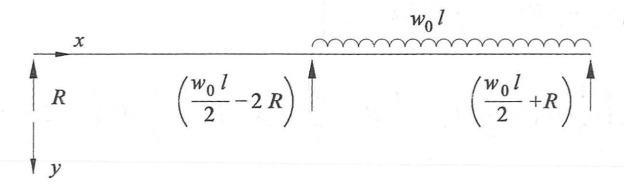


FIGURA 2.8

Un último ejemplo debería dejar claro el empleo del método de Macaulay.

Ejemplo 2.3. Consideremos una viga empotrada en su extremo izquierdo O, que descansa, además, sobre otros dos apoyos rígidos, y que soporta las cargas W_1 y W_2, como aparece en la figura 2.9. La viga tiene dos redundancias, que se

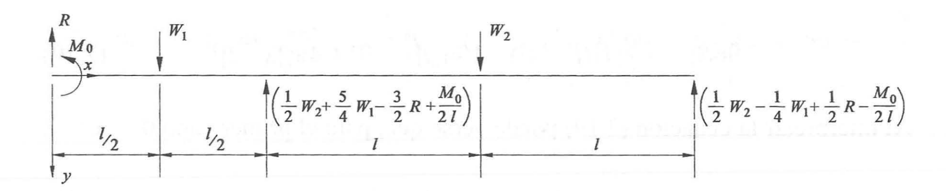


FIGURA 2.9

han elegido como la reacción R y el momento flector M_0 en el extremo izquierdo. Sencillas consideraciones de equilibrio permiten obtener el valor de las reacciones en los otros dos apoyos. Escribiendo el momento flector en la viga para una sección $x > 2l$, la ecuación de Macaulay es

$$B\frac{d^2y}{dx^2} = M_0 - Rx + W_1\left[x - \frac{l}{2}\right]$$
$$-\left(\frac{1}{2}W_2 + \frac{5}{4}W_1 - \frac{3}{2}R + \frac{M_0}{2l}\right)[x - l] + W_2\,[x - 2l] \tag{2.22}$$

que tras su integración da

$$B\frac{dy}{dx} = M_0x - \frac{1}{2}Rx^2 + \frac{1}{2}W_1\left[x - \frac{l}{2}\right]^2$$
$$-\frac{1}{2}\left(\frac{1}{2}W_2 + \frac{5}{4}W_1 - \frac{3}{2}R + \frac{M_0}{2l}\right)[x - l]^2 + \frac{1}{2}W_2\,[x - 2l]^2 + \alpha \tag{2.23}$$

Aplicando la condición de contorno ($x = 0$, $dy/dx = 0$), se ve que $\alpha = 0$; una nueva integración da

$$By = \frac{1}{2} M_0 x^2 - \frac{1}{6} R x^3 + \frac{1}{6} W_1 \left[x - \frac{l}{2} \right]^3$$
$$- \frac{1}{6} \left(\frac{1}{2} W_2 + \frac{5}{4} W_1 - \frac{3}{2} R + \frac{M_0}{2l} \right) [x - l]^3 + \frac{1}{6} W_2 [x - 2l]^3 + \beta \quad (2.24)$$

La condición de contorno ($x = 0$, $y = 0$) da $\beta = 0$, y las otras dos condiciones, $y = 0$ para $x = l$ y $x = 3l$, dan respectivamente

$$\left. \begin{aligned} 0 &= \frac{1}{2} M_0 l^2 - \frac{1}{6} R l^3 + \frac{1}{48} W_1 l^3 \\ 0 &= \frac{9}{2} M_0 l^2 - \frac{9}{2} R l^3 + \frac{125}{48} W_1 l^3 \\ &\quad - \frac{4}{3} \left(\frac{1}{2} W_2 + \frac{5}{4} W_1 - \frac{3}{2} R + \frac{M_0}{2l} \right) l^3 + \frac{1}{6} W_2 l^3 \end{aligned} \right\} \quad (2.25)$$

Estas ecuaciones bastan para calcular los valores de R y M_0:

$$\left. \begin{aligned} R &= \frac{1}{88} (56 W_1 - 36 W_2) \\ M_0 &= \frac{1}{88} (15 W_1 - 12 W_2) l \end{aligned} \right\} \quad (2.26)$$

Se han obtenido, por tanto, los valores de las redundancias. La sustitución de estos valores (2.26) en la ecuación (2.24) nos da la ecuación de la deformada de la viga.

Las ecuaciones (2.25) son ecuaciones de compatibilidad, obtenidas de forma directa considerando la geometría de la viga deformada y escritas en función de los «esfuerzos» desconocidos (R y M_0).

El principio de superposición

Como acabamos de ver, la solución de un problema estructural por integración directa da una descripción completa del estado de la estructura; no sólo se obtiene la distribución de momentos, también se calculan las flechas. En algunos casos no se necesita calcular las flechas, al menos no inmediatamente, y el trabajo puede abreviarse mucho usando métodos que calculan sólo el valor de las redundancias. Se discutirán varios de estos métodos. Uno de los más importantes «ensambla» soluciones parciales y deduce la solución completa superponiendo soluciones estándares de los elementos de la estructura.

Como consecuencia de la relación lineal entre momento flector y curvatura, las cantidades de interés en el análisis de estructuras son también funciones lineales de las cargas. Así, en el ejemplo 2.3, ecuaciones (2.26), puede verse que R y M_0 son funciones lineales de las cargas W_1 y W_2. Si W_2 fuera igual a cero, el valor de R sería de $56W_1/88$; análogamente, si W_2 fuera cero, el R sería $-36W_2/88$. Por tanto, el valor de R podría haberse obtenido resolviendo dos problemas; uno en el que sólo actúa W_1 y el segundo en el que sólo actúa W_2. Se podría, después, superponer los resultados mediante una sencilla suma para obtener el valor total de R.

De esta forma se podría haber ahorrado algo de trabajo aritmético pero, de hecho, hay mejores formas de aplicar el principio de superposición. Para el mismo ejemplo, las ecuaciones (2.23) y (2.24) muestran que las pendientes y descensos son también funciones lineales de las cargas W_1 y W_2 a todo lo largo de la viga. Este hecho permite obtener soluciones a partir de la consideración del comportamiento de la estructura en condiciones «libres» y «reactantes».

Ejemplo 2.1 (bis). Consideremos la misma viga empotrada-apoyada que se analizó más arriba. En la figura 2.10, la viga hiperestática en (a) se ha hecho isostática en (b), al convertir el extremo empotrado en un apoyo. La carga uniformemente repartida w_0 producirá en el extremo de la viga una rotación θ_1 y puede demostrarse que

$$\theta_1 = \frac{w_0 l^3}{24B} \tag{2.27}$$

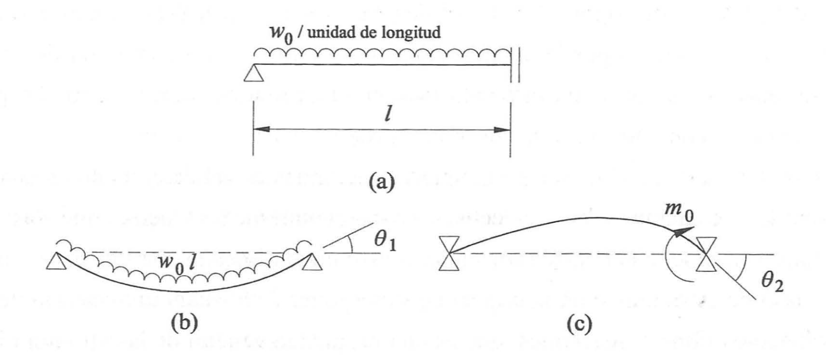


FIGURA 2.10

En la figura 2.10 (c) se ha introducido la redundancia m_0 que nos de los momentos flectores reactantes en la viga empotrada-apoyada; la superposición de los dos sistemas de las figuras 2.10 (b) y (c) nos lleva, por supuesto, a la solución del problema original. Ahora bien, la aplicación del momento flector m_0 en la figura 2.10 (c), en uno de los extremos de la viga simplemente apoyada, producirá en dicho extremo una rotación θ_2, que puede deducirse que vale

$$\theta_2 = \frac{m_0 l}{3B} \tag{2.28}$$

Para resolver el problema es preciso introducir una condición de contorno. En este caso, es preciso que la pendiente de la viga en su extremo derecho sea cero. Superponiendo las deformaciones de las vigas en las figuras 2.10 (b) y (c) se verá que la rotación en el sentido de las agujas del reloj en el extremo derecho de la viga vale $(-\theta_1 + \theta_2)$, y la condición de contorno implica $\theta_1 = \theta_2$. Igualando las ecuaciones (2.27) y (2.28) obtenemos $m_0 = w_0 l^2/8$, se ha encontrado, por tanto, el valor de la redundancia m_0.

Como siempre, la forma de hacer isostática la estructura hiperestática puede elegirse libremente. Si se elimina el apoyo del extremo izquierdo de la viga, los diagramas libres y reactantes son los de la figura 2.2. En la figura 2.2 (a) el descenso del extremo de la ménsula sometida a una carga uniformemente repartida

w_0 es $w_0 l^4/8B$. En la figura 2.2 (b), el desplazamiento vertical en el extremo de la ménsula producido por la carga puntual m/l es $ml^2/3B$. La condición de contorno requiere que el desplazamiento total en el extremo sea cero, de modo que $m = 3\ w_0 l^2/8$ (compárese con la ecuación (2.6)).

Esta forma de resolver los problemas estructurales es válida en tanto en cuanto que las pendientes y las flechas son proporcionales a las cargas aplicadas; el método sólo puede aplicarse, por tanto, a estructuras linealmente elásticas. Para este tipo de estructuras, no sólo pueden superponerse los diagramas de momentos flectores libres y reactantes, que es una propiedad general de la estructura independiente de la linealidad o no-linealidad de la relación momento-curvatura; la *respuesta* de la estructura bajo estados de carga libres y reactantes puede superponerse también.

TABLA 2.1

	Pendiente en el extremo	*Flecha en el extremo*
l, M	$\frac{Ml}{B}$	$\frac{Ml^2}{2B}$
W	$\frac{Wl^2}{2B}$	$\frac{Wl^3}{3B}$
W	$\frac{Wl^2}{6B}$	$\frac{Wl^3}{8B}$

En el ejemplo anterior se usaron algunas fórmulas para pendientes y flechas. Es evidente que, con un número reducido de este tipo de expresiones se podrían resolver problemas mucho más complejos.

Coeficientes de flecha

La tabla 2.1 de las pendientes y flechas para una ménsula simple bajo tres estados de carga; las flechas son positivas hacia abajo, y para las rotaciones se considera positivo el sentido de las agujas del reloj. Análogamente la tabla 2.2 da re-

TABLA 2.2

	Pendiente en el extremo, θ_A	*Pendiente en el extremo,* θ_B
	$\frac{Wab}{6Bl}(l+b)$	$-\frac{Wab}{6Bl}(l+a)$
	$\frac{Wl^2}{16B}$	$-\frac{Wl^2}{16B}$
	$\frac{Wl^2}{24B}$	$-\frac{Wl^2}{24B}$
	$-\frac{Ml}{6B}$	$+\frac{Ml}{3B}$

sultados para una viga simplemente apoyada. Para la mayoría de los problemas sólo se precisan estos resultados; para condiciones de carga más complicadas pueden emplearse otros métodos, o bien pueden analizarse usando alguna de las expresiones anteriores. Por ejemplo, la carga uniformemente repartida que se extiende sólo sobre una parte de la viga, figura 2.11, producirá una rotación θ_1 en el

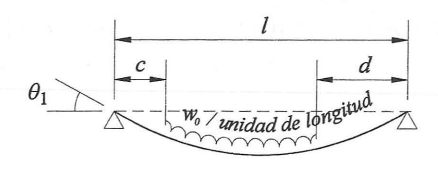


FIGURA 2.11

extremo izquierdo. A partir del primer resultado de la Tabla 2.2, haciendo $a = z$ y $b = (l - z)$, el valor de θ_1 vendrá dado por:

$$\theta_1 = \int_c^{l-d} \frac{(w_0 dz)(z)(l-z)}{6Bl}(2l - z) \tag{2.29}$$

esto es,

$$\theta_1 = \frac{w_0}{24Bl}[(l^2 - d^2)^2 - c^2(2l - c)^2] \tag{2.30}$$

Ejemplo 2.3 (bis). Se usará de nuevo el método de los coeficientes de flecha para resolver el problema de la figura 2.9. Los sistemas libres y reactantes se muestran en la figura 2.12, en la que puede verse que la viga continua original ha sido reemplazada por dos vigas simplemente apoyadas. Se toman como redundancias los momentos flectores m_1 y m_2. Como antes, la superposición de los resultados obtenidos a partir de las figuras 2.12 (a) y (b) nos dará el comportamiento de la viga original; estos resultados tienen que superponerse de forma que se satisfagan las condiciones de contorno y de compatibilidad. En el extremo derecho

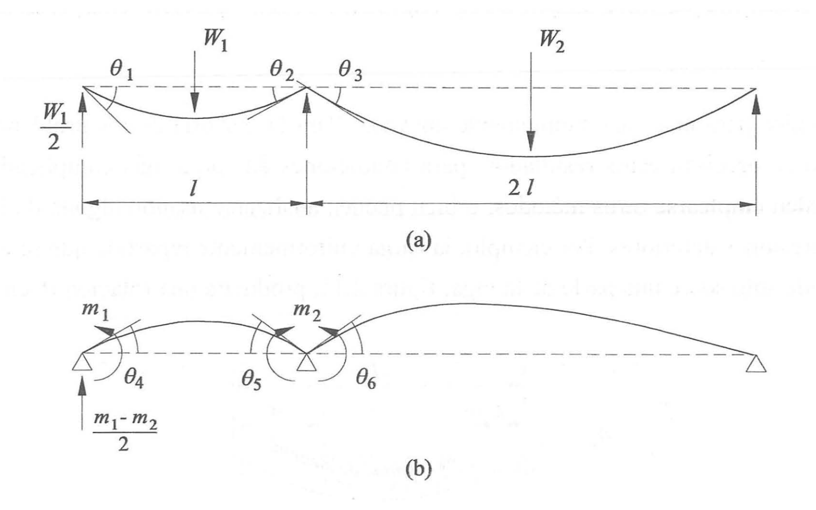


FIGURA 2.12

de la viga la pendiente tiene que ser cero, y en el apoyo interior no debe haber discontinuidad en la pendiente de la viga. Según los giros de la figura 2.12, por tanto,

$$\left.\begin{aligned} \theta_1 &= \theta_4 \\ \theta_2 + \theta_3 &= \theta_5 + \theta_6 \end{aligned}\right\} \tag{2.31}$$

Los valores de los giros θ pueden escribirse directamente a partir de la tabla 2.2:

$$\left.\begin{aligned} \theta_1 = \theta_2 &= \frac{W_1 l^2}{16B} \\ \theta_3 &= \frac{W_2(2l)^2}{16B} = \frac{W_2 l^2}{4B} \\ \theta_4 &= \frac{m_1 l}{3B} + \frac{m_2 l}{3B} \\ \theta_5 &= \frac{m_1 l}{6B} + \frac{m_2 l}{3B} \\ \theta_6 &= \frac{m_2(2l)}{3B} \end{aligned}\right\} \tag{2.32}$$

Sustituyendo estos valores en las ecuaciones (2.31), se obtiene

$$\left.\begin{aligned} m_1 &= \frac{1}{88}(15W_1 - 12W_2)l \\ m_2 &= \frac{1}{88}(3W_1 + 24W_2)l \end{aligned}\right\} \tag{2.33}$$

El problema se había resuelto antes en función de las redundancias $M(= m_1)$ y R. A partir de las figuras 2.9 y 2.12, puede verse que

$$R = \frac{1}{2}W_1 + \frac{m_1 - m_2}{l} \tag{2.34}$$

y sustituyendo los valores de m_1 y m_2,

$$R = \frac{1}{88}(56W_1 - 36W_2) \tag{2.35}$$

que coincide con la ecuación (2.26).

Ecuaciones de pendiente-flecha

Hay un gran número de métodos «ingeniosos» para la solución de los problemas estructurales, cuyo empleo depende del gusto y la fantasía del usuario. El método de los coeficientes de flecha no cae en realidad dentro de esta categoría, si bien al usarlo pueden perderse de vista alguno de los principios del análisis de estructuras. Sin embargo, las ideas fundamentales de diagramas libres y reactantes se siguen usando, y las condiciones de contorno y compatibilidad entran directamente en los cálculos. Este método puede extenderse y ampliarse para proporcionar ecuaciones generales de pendiente-flecha para elementos sometidos a cualquier sistema de cargas. Estas ecuaciones proporcionan soluciones todavía más rápidas de los problemas, puesto que incorporan los resultados de algunas integraciones.

Consideremos que una viga AB, originalmente recta y sin deformar, que soporta un cierto sistema de cargas, se mueve hasta alcanzar la posición descrita en la figura 2.13 (a). En su estado final, la viga está sometida a momentos flectores M_A y M_B, en el sentido de las agujas del reloj, y a giros del mismo sentido en sus extremos, ϕ_A y ϕ_B. Las flechas o desplazamientos en sus extremos son δ_A y δ_B. Las ecuaciones generales de pendiente-flecha nos relacionan estos momentos flectores, giros y flechas con las cargas exteriores que actúan sobre la viga.

Resulta cómodo tener en cuenta las cargas exteriores considerando su efecto sobre una viga similar cuyos extremos están empotrados, fijos en posición y dirección. Supongamos que bajo la acción de la carga los momentos en los extremos de la viga tienen los valores M_A^F y M_B^F, como se muestra en la figura 2.13 (b). Llamaremos a los momentos M^F *momentos de empotramiento* y supondremos

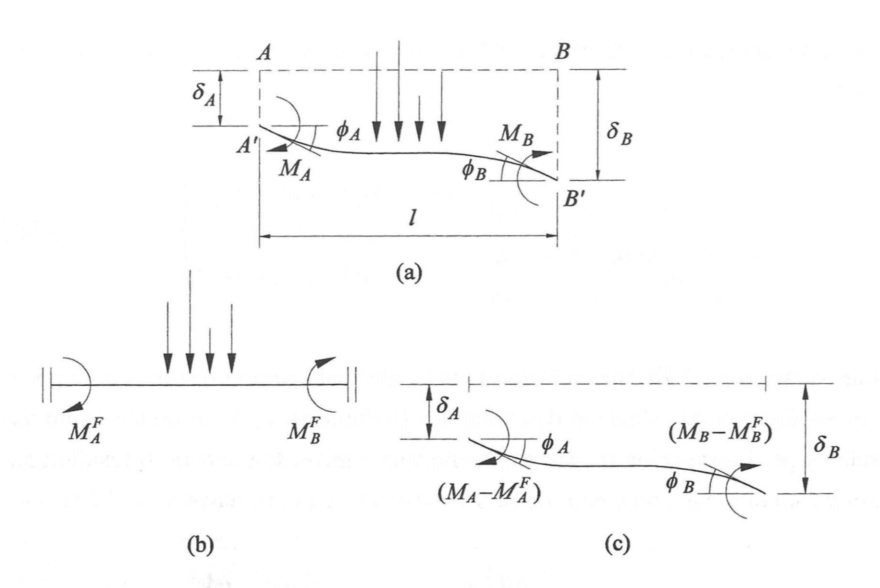


FIGURA 2.13

que su valor es conocido para un cierto sistema de cargas. Usando de nuevo el principio de superposición se verá que si se suma el sistema de la figura 2.13 (c) al de la figura 2.13 (b) se obtendrá el sistema original (Fig. 2.13 (a)).

Así, el problema inmediato es deducir relaciones entre las variables que aparecen en la figura 2.13 (c), y para este propósito usaremos la última fórmula de la tabla 2.2. En primer lugar, es evidente que si la viga *AB* se desplaza lateralmente *sin flectar* de manera que sus extremos ocupan las posiciones de la figura 2.13 (c), la pendiente de la viga será uniforme e igual a $(\delta_B - \delta_A)/l$. El efecto de los momentos flectores de los extremos es aumentar el giro en el extremo *A* de la viga que pasa de $(\delta_B - \delta_A)/l$ a su valor final ϕ_A; análogamente sucede en el extremo *B*. Así, empleando la tabla 2.2,

$$\phi_A - \left(\frac{\delta_B - \delta_A}{l}\right) = \frac{(M_A - M_A^F)l}{3B} - \frac{(M_B - M_B^F)l}{6B} \tag{2.36}$$

$$\phi_B - \left(\frac{\delta_B - \delta_A}{l}\right) = \frac{(M_B - M_B^F)l}{3B} - \frac{(M_A - M_A^F)l}{6B} \tag{2.37}$$

Estas ecuaciones pueden reescribirse en la forma en que habitualmente se usan:

$$\left.\begin{aligned}\phi_A &= \frac{\delta_B-\delta_A}{l}+\frac{l}{6B}\{2(M_A-M_A^F)-(M_B-M_B^F)\}\\ \phi_B &= \frac{\delta_B-\delta_A}{l}+\frac{l}{6B}\{2(M_B-M_B^F)-(M_A-M_A^F)\}\end{aligned}\right\} \tag{2.38}$$

Las ecuaciones (2.38) tienen la forma más adecuada para la resolución de pórticos en función de esfuerzos desconocidos (redundantes). Si se toman como variables las deformaciones, esto es, las flechas y giros desconocidos, resulta conveniente poner las ecuaciones de pendiente-flecha en la forma:

$$\left.\begin{aligned}M_A-M_A^F &= \frac{6B}{l}\left[\frac{1}{3}(2\phi_A+\phi_B)+\frac{\delta_A-\delta_B}{l}\right]\\ M_A-M_B^F &= \frac{6B}{l}\left[\frac{1}{3}(\phi_A+2\phi_B)+\frac{\delta_A-\delta_B}{l}\right]\end{aligned}\right\} \tag{2.39}$$

Cualquiera de los sistemas de ecuaciones (2.38) o (2.39) proporciona dos relaciones entre los momentos flectores y los giros en los extremos del elemento, y también considera los desplazamientos laterales en los extremos. Las cargas exteriores entran en las ecuaciones en la forma de momentos de empotramiento. La

TABLA 2.3

	M_A^F	M_B^F
a, b, W, A, B, l	$-\dfrac{Wab^2}{l^2}$	$\dfrac{Wa^2b}{l^2}$
W, $l/2$, $l/2$	$-\dfrac{Wl}{8}$	$\dfrac{Wl}{8}$
W	$-\dfrac{Wl}{12}$	$\dfrac{Wl}{12}$

tabla 2.3 da tres conjuntos de momentos de empotramiento útiles; a partir de los resultados para la carga excéntrica pueden tratarse distribuciones de carga más complicadas por superposición e integración.

Ejemplo 2.3 (ter). El mismo ejemplo, figura 2.9, se resolverá usando las ecuaciones de pendiente-flecha. El primer paso consiste en realizar un esquema de la deformada de la viga, como se ha hecho en la figura 2.14, y nombrar las pendientes y los momentos en los extremos para cada vano. En este caso, M_1 y M_2 son los momentos flectores desconocidos correspondientes a las dos redundancias (compárese con la figura 2.12). El giro θ, por continuidad, es el mismo a ambos lados del apoyo interior Q. No tiene importancia alguna si en el dibujo se han considerado momentos flectores o giros de signo equivocado; el análisis corregirá automáticamente los signos de las cantidades implicadas.

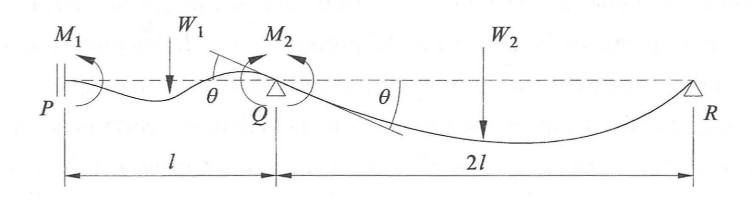


FIGURA 2.14

En primer lugar se calcularán los momentos de empotramiento. A partir de la tabla 2.3 sus valores numéricos son: $W_1l/8$ para ambos extremos del vano PQ, y $W_2l/4$ para los extremos del vano QR. Comparando el vano PQ de la figura 2.14 con el vano AB de la figura 2.13 (a), y teniendo en cuenta las direcciones de los momentos de extremo y de las rotaciones, pueden escribirse las ecuaciones (2.38):

$$0 = \frac{0-0}{l} + \frac{l}{6B}\left[2\left(-M_1 + \frac{W_1 l}{8}\right) - \left(M_2 - \frac{W_1 l}{8}\right)\right] \qquad (2.40)$$

$$\theta = \frac{0-0}{l} + \frac{l}{6B}\left[2\left(M_2 - \frac{W_1 l}{8}\right) - \left(-M_1 + \frac{W_1 l}{8}\right)\right] \qquad (2.41)$$

Análogamente, para el vano QR, la primera de las ecuaciones (2.38) da:

$$\theta = \frac{0-0}{2l} + \frac{2l}{6B}\left[2\left(-M_2 + \frac{W_2 l}{4}\right) - \left(0 - \frac{W_2 l}{4}\right)\right] \tag{2.42}$$

La segunda ecuación de (2.38), aplicada al vano QR dará el giro en el extremo R de la viga, que no interesa en este contexto.

Las ecuaciones (2.40), (2.41) y (2.42) contienen tres incógnitas, M_1, M_2 y θ. Podemos resolver este sistema para obtener M_1 y M_2 y, de esta manera, obtener rápidamente los valores de la ecuación (2.33). Puede demostrarse que, usando las ecuaciones de pendiente-flecha para cada vano, su número es siempre suficiente para calcular las cantidades desconocidas.

Ejemplo 2.4. El pórtico de la figura 1.15, que ha sido ya discutido, se analizará ahora mediante las ecuaciones de pendiente-flecha. En la figura 2.15 se muestra un esquema de la deformada del pórtico. El pie de los pilares no gira, y la cabeza de los pilares giran θ_B y θ_D; estos giros son los mismos que los de los extremos de la viga. Como se ha supuesto que la viga ni se acorta ni se alarga, el desplazamiento lateral δ de cada pilar es el mismo. La rigidez a flexión B del pórtico es constante.

En los extremos de cada elemento actúan momentos M_A, M_B, M_D y M_E. Como ya se discutió en el Capítulo 1, dado que el pórtico tiene tres redundancias los

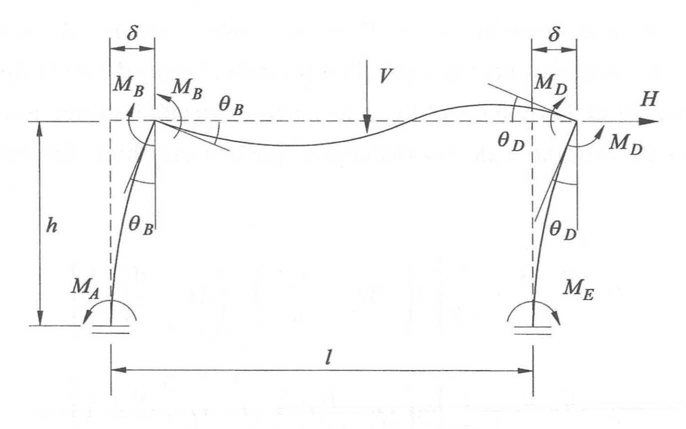


FIGURA 2.15

cuatro valores del momento flector tienen que estar relacionados por una ecuación de equilibrio. Según la ecuación (1.21)

$$Hh = M_A - M_B + M_D - M_E \tag{2.43}$$

Por el momento la ecuación (1.22) no entra en los cálculos, pero será necesaria si se quiere obtener el valor M_C del momento flector debajo de la carga vertical.

Comparando de nuevo, separadamente, los dos pilares y la viga con el esquema de la figura 2.13 (a), y aplicando la ecuación (2.38), pueden escribirse las siguientes seis ecuaciones:

Para el pilar izquierdo:

$$\left.\begin{aligned} 0 &= \frac{\delta}{h} + \frac{h}{6B}\,[2(-M_A) - M_B] \\ \theta_B &= \frac{\delta}{h} + \frac{h}{6B}\,[2(M_B - (-M_A)] \end{aligned}\right\} \tag{2.44}$$

(Nótese que no actúa ninguna carga transversal a lo largo del pilar, de manera que los momentos de empotramiento debidos a las cargas exteriores son cero. Los momentos de empotramiento para la viga tienen el valor $Vl/8$).

Para la viga:

$$\left.\begin{aligned} \theta_B &= \frac{l}{6B}\left[2\left(-M_B + \frac{Vl}{8}\right) - \left(M_D - \frac{Vl}{8}\right)\right] \\ \theta_D &= \frac{l}{6B}\left[2\left(M_D - \frac{Vl}{8}\right) - \left(-M_B + \frac{Vl}{8}\right)\right] \end{aligned}\right\} \tag{2.45}$$

Y para el pilar derecho:

$$\left.\begin{aligned} 0 &= \frac{\delta}{h} + \frac{h}{6B}\,[2M_E - (-M_D)] \\ \theta_D &= \frac{\delta}{h} + \frac{h}{6B}\,[2(-M_D) - M_E] \end{aligned}\right\} \tag{2.46}$$

Las cantidades desconocidas θ_B, θ_D y δ, pueden ser eliminadas de estas seis ecuaciones y, así, obtener las ecuaciones de compatibilidad:

$$\left.\begin{array}{l} 2M_A + M_B + M_D + 2M_E = 0 \\ M_B + \left(2 + \dfrac{3h}{l}\right) M_D + \dfrac{3h}{l} M_E = \dfrac{3Vl}{8} \\ \dfrac{3h}{l} M_A + \left(2 + \dfrac{3h}{l}\right) M_B + M_D = \dfrac{3Vl}{8} \end{array}\right\} \qquad (2.47)$$

El sistema de ecuaciones (2.47), junto con la ecuación de equilibrio (2.43), puede resolverse con facilidad para dar

$$\left.\begin{array}{l} M_A = \dfrac{Hh}{2}\left(\dfrac{l+3h}{l+6h}\right) - \dfrac{Vl^2}{8}\left(\dfrac{1}{2l+h}\right) \\ M_B = -\dfrac{Hh}{2}\left(\dfrac{3h}{l+6h}\right) + \dfrac{Vl^2}{8}\left(\dfrac{2}{2l+h}\right) \\ M_D = \dfrac{Hh}{2}\left(\dfrac{3h}{l+6h}\right) + \dfrac{Vl^2}{8}\left(\dfrac{2}{2l+h}\right) \\ M_E = -\dfrac{Hh}{2}\left(\dfrac{l+3h}{l+6h}\right) - \dfrac{Vl^2}{8}\left(\dfrac{1}{2l+h}\right) \end{array}\right\} \qquad (2.48)$$

Otros métodos

Existen muchos otros métodos para la resolución rápida de pórticos. Cada uno de ellos, normalmente va dirigido a un tipo particular de estructura y puede resultar innecesariamente trabajoso cuando se aplica a otros tipos.

Para vigas continuas puede usarse el *teorema de los tres momentos*. La figura 2.16 muestra una parte *XYZ* de una viga continua, donde los apoyos pueden haber descendido, δ_X, δ_Y y δ_Z. Los momentos flectores positivos sobre los apoyos pueden relacionarse escribiendo las ecuaciones pendiente-flecha (2.38); la expresión final es:

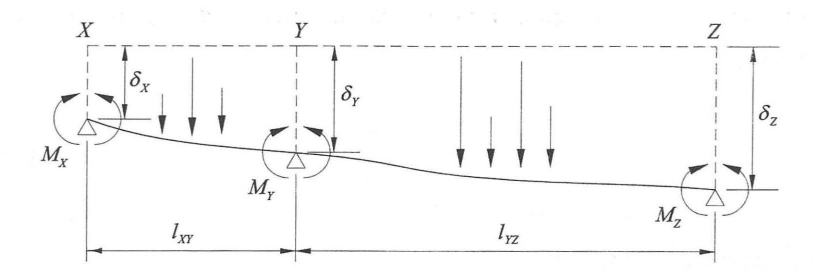


FIGURA 2.16

$$\frac{l_{XY}}{B_{XY}}(M_X) + 2\left(\frac{l_{XY}}{B_{XY}} + \frac{l_{YZ}}{B_{YZ}}\right)(M_Y) + \frac{l_{YZ}}{B_{YZ}}(M_Z) =$$
$$= -\frac{l_{XY}}{B_{XY}}(M^F_{XY}) + 2\,\frac{l_{XY}}{B_{XY}}(M^F_{YX}) - 2\,\frac{l_{YZ}}{B_{YZ}}(M^F_{YZ}) + \frac{l_{YZ}}{B_{YZ}}(M^F_{ZY})$$
$$+ 6\left[\frac{\delta_X}{l_{XY}} - \frac{\delta_Y}{l_{XY}} - \frac{\delta_Y}{l_{YZ}} + \frac{\delta_Z}{l_{YZ}}\right] \qquad (2.49)$$

Para cada dos tramos de una viga continua pueden escribirse ecuaciones similares a la (2.49), obteniéndose un sistema de ecuaciones a partir del cual pueden encontrarse los momentos flectores sobre cada apoyo. En particular, si los vanos l_{XY} y l_{YZ} son iguales y la rigidez a flexión B_{XY} es constante (igual a B_{YZ}), la ecuación (2.49) se convierte en

$$M_X + 4M_Y + M_Z = -M^F_{XY} + 2(M^F_{YX} - M^F_{YZ}) + M^F_{ZY} + \frac{6B}{l^2}(\delta_X - 2\delta_Y + \delta_Z) \qquad (2.50)$$

No es recomendable el empleo de estas ecuaciones a no ser que vaya a realizarse un gran número de cálculos repetitivos; incluso en este caso sería probablemente más cómodo acudir a tablas ya calculadas que cubren una amplia gama de casos de carga para vigas continuas de varios vanos.

Para el caso de vigas simples, de un solo tramo, se usa con frecuencia el *método de las áreas de momento* y otro estrechamente relacionado con éste, el de las *vigas conjugadas*; en particular, estos métodos resultan útiles para calcular

momentos de empotramiento. Partiendo de la ecuación básica de la flexión, ecuación (1.27),

$$M = B\,\frac{d^2y}{dx^2} \tag{2.51}$$

puede verse que

$$\int_A^B \frac{M}{B}\,dx = \left[\frac{dy}{dx}\right]_A^B = (\theta_B - \theta_A) \tag{2.52}$$

La integral de la ecuación (2.52) representa el área del diagrama de momentos entre los puntos A y B de la viga, cuando se divide por la rigidez a flexión de la viga. Así, pues, la ecuación (2.52) establece que este área es igual a la variación de la pendiente entre dos puntos de la viga.

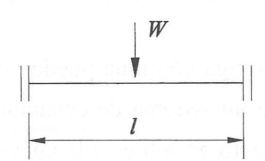


FIGURA 2.17

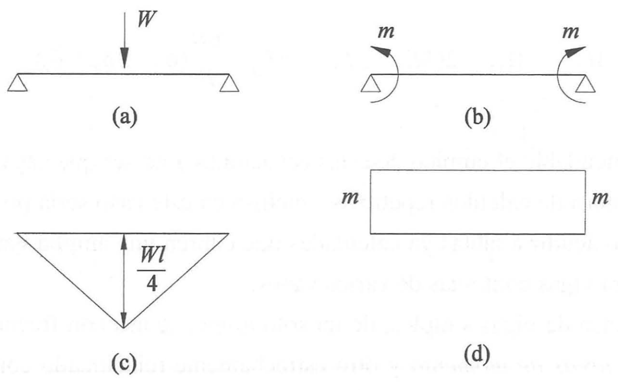


FIGURA 2.18

Supongamos, por ejemplo, que se necesitan los momentos de empotramiento perfecto de una viga de sección constante que soporta una carga puntual W en su centro (Fig. 2.17). En la figura 2.18 se muestran los diagramas de momentos flectores libres y reactantes. Como la viga está empotrada en sus extremos, la ecuación (2.52) afirma que el área neta del diagrama completo de momentos flectores tiene que ser cero; por tanto, las áreas de los diagramas libres y reactantes tienen que ser iguales. De las Figs. 2.18 (c) y (d), se llega a:

$$\frac{1}{2} l \frac{Wl}{4} = ml$$

esto es

$$m = \frac{Wl}{8} \tag{2.53}$$

y el momento de empotramiento perfecto es igual a $Wl/8$.

Si se multiplican ambos lados de la ecuación (2.51) por x y luego se integra,

$$\int_A^B x \frac{M}{B} dx = \int x \frac{d^2y}{dx^2} dx = \left[x \frac{dy}{dx} - y \right]_A^B = [l\theta_B - \delta_B + \delta_A] \tag{2.54}$$

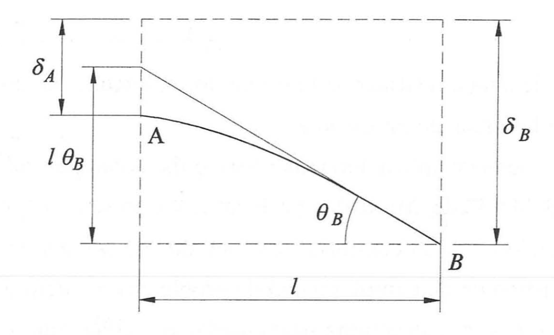


FIGURA 2.19

En relación con la figura 2.19, la ecuación (2.54) establece que el momento del diagrama de *M*/*B* respecto al punto *A* de una viga, es igual a la flecha de la viga en ese punto respecto a la tangente en el punto *B*.

Volviendo a la ménsula apoyada, la figura 2.20 (b) muestra el diagrama de momentos, dividiendo éstos en libres y reactantes. Como la pendiente de la viga en el extremo *B* es cero, la flecha en *A* respecto a la tangente en *B* es también cero. El momento del área del diagrama de momentos flectores respecto a *A* es $(\frac{1}{2}l)\ (\frac{2}{3}l)(w_0l^2/8)$, puesto que el área de la parábola es dos tercios de la del rectángulo que la contiene. El momento del área del diagrama reactante respecto a *A* es $(\frac{2}{3}l)(\frac{1}{2}lm_0)$. Por la ecuación (2.54) ambas cantidades tienen que ser iguales, de modo que $m_0 = w_0l^2/8$.

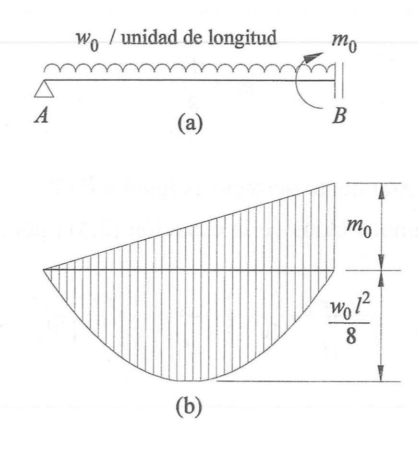


FIGURA 2.20

El lector puede ahora verificar, si lo desea, los valores de la tabla 2.3 utilizando el método de las áreas de momentos.

Hay otros métodos de aplicación más restringida. Están pensados para ahorrar trabajo en el cálculo de determinados problemas y esto se consigue limitando su campo de aplicación. Por el contrario, los métodos de la energía pueden usarse en el cálculo elástico de una amplia gama de problemas estructurales. En general son más adecuados para estructuras trianguladas o cerchas que para estructuras porticadas; no obstante se expondrán brevemente. Los cálculos son idénticos a

los de la aplicación directa del trabajo virtual; por tanto el enfoque de la energía se hará a través del trabajo virtual.

Aplicación directa del trabajo virtual

Se ha visto ya, ecuación 1.7, que los momentos flectores «reales» de un pórtico pueden escribirse como suma de momentos libres y momentos reactantes:

$$M = M_w + \sum_{r=1}^{N} \alpha_r m_r \tag{2.55}$$

Al escribir la ecuación del trabajo virtual para la resolución directa de un pórtico, se considerará que el conjunto de deformaciones compatibles (y, κ) son las deformaciones *reales* del pórtico correspondientes a la distribución de momentos M. Así, para un pórtico elástico, podemos escribir inmediatamente que $\kappa = M/B$, ecuación (1.27).

Como conjunto en equilibrio, el otro elemento de la ecuación del trabajo virtual, se usará el conjunto (0, α_r, m_r). Es decir, se tomará un conjunto de momentos flectores, correspondientes a cierta cantidad redundante, que están en equilibrio con cargas exteriores *nulas*. Por lo tanto, el lado izquierdo de la ecuación del trabajo virtual (1.17) es cero, y

$$\int (\alpha_r m_r) \left(\frac{M}{B} \right) dx = 0 \tag{2.56}$$

Para una estructura que tiene N redundancias, hay exactamente N distribuciones de momentos independientes de la forma $\alpha_r m_r$, cada una de ellas en equilibrio con cargas exteriores cero. En consecuencia, la ecuación (2.56) representa N ecuaciones de compatibilidad distintas para hallar las N cantidades desconocidas (las redundancias).

Como ejemplo elemental de aplicación, consideremos de nuevo la viga biempotrada de sección constante, figuras 2.17 y 2.18, que soporta una carga puntual

en su centro. El diagrama de momentos flectores *reales* se muestra en la figura 2.21 (a), donde el momento flector m está todavía por determinar. Por simetría, la viga presenta una única redundancia bajo esta carga concreta, de modo que la única distribución de momentos posible en la viga que está en equilibrio con cargas exteriores nulas se muestra en la figura 2.21 (b); (se trata, por supuesto, de la línea reactante de la viga).

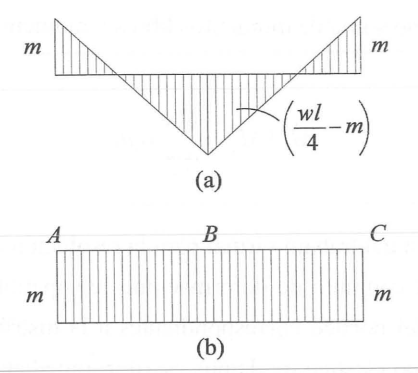


FIGURA 2.21

Así, para el segmento AB de la viga,

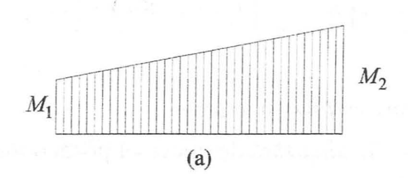
$$\left.\begin{aligned} M &= m - \frac{W}{2}x \\ \alpha_1 m_1 &= m \end{aligned}\right\} \tag{2.57}$$

para el segmento BC las expresiones son análogas. Sustituyendo estos valores en la ecuación (2.56),

$$\int_0^{l/2} m\left(m - \frac{W}{2}x\right)dx = 0 \tag{2.58}$$

de donde resulta, $m = Wl/8$.

En el caso de un segmento de viga de longitud L, de rigidez a flexión constante B, y en el que tanto los momentos libres como los reactantes varían linealmen-



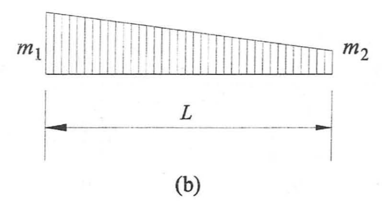


FIGURA 2.22

te, no es necesario calcular una integral similar a la de la ecuación (2.58). La variación lineal de los momentos flectores se ha representado en la figura 2.22, y puede comprobarse que

$$\int_0^L mM\,dx = \frac{L}{6}\,[2(M_1m_1 + M_2m_2) + (M_1m_2 + M_2m_1)] \tag{2.59}$$

Volviendo al ejemplo de la figura 2.21, puede elaborarse la tabla 2.4. Si aplicamos la ecuación (2.59) para resolver la ecuación (2.56),

TABLA 2.4

	A	B
M	m	$m - \frac{Wl}{4}$
$\alpha_r m_r$	m	m

$$(2)(m)(m) + 2\left(m - \frac{Wl}{4}\right)(m) + (m)(m) + \left(m - \frac{Wl}{4}\right)(m) = 0 \qquad (2.60)$$

que, por supuesto, da $m = Wl/8$, como antes.

Ejemplo 2.4 (bis). Se analizará de nuevo el pórtico biempotrado en su base; la figura 2.23 (b) muestra los diagramas de momentos flectores reales. Recuérde-

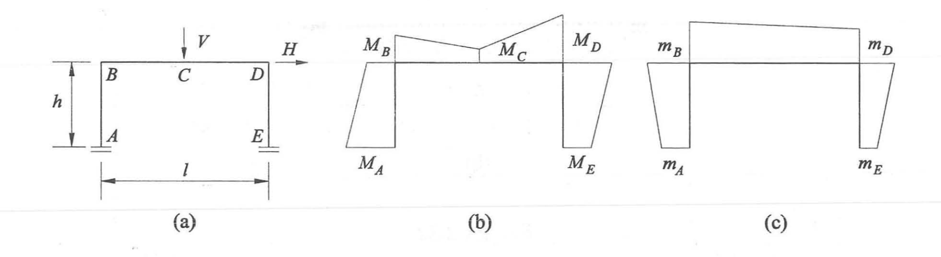


FIGURA 2.23

se que los valores de los momentos flectores en los cinco puntos cardinales tienen que estar relacionados por dos ecuaciones de equilibrio (las ecuaciones (1.21) y (1.22)):

$$\left.\begin{aligned} M_A - M_B \qquad + M_D - M_E &= Hh \\ M_B - 2M_C + M_D \qquad &= \frac{Vl}{2} \end{aligned}\right\} \qquad (2.61)$$

Se precisan otras tres ecuaciones, las de compatibilidad, para resolver el problema; éstas serán suministradas por otras tres distribuciones de auto-solicitación correspondientes a las tres redundancias.

Se ha dibujado el diagrama reactante en la figura 2.23 (c), y de nuevo, hay que recordar que los momentos flectores tienen que satisfacer la forma homogénea de la primera de las ecuaciones (2.61), esto es

$$m_A - m_B + m_D - m_E = 0 \qquad (2.62)$$

De nuevo podemos confeccionar una tabla con la información necesaria para resolver el problema por la aplicación directa del trabajo virtual. En la tabla 2.5. se han introducido tres posibles distribuciones de auto-solicitación, correspondientes a los diagramas de la figura 2.24. Estas distribuciones son independientes, pero no son necesariamente las mejores entre las posibles; su deducción puede verse al comparar la figura 2.24 con la figura 2.23 (c).

TABLA 2.5

Vano	h		$l/2$		$l/2$		h	
	A	B	B	C	C	D	D	E
M (Fig. 2.23 (b))	M_A	M_B	M_B	M_C	M_C	M_D	M_D	M_E
$\alpha_A m_A$ (Fig. 2.24 (a))	1	0	0	0	0	0	0	1
$\alpha_B m_B$ (Fig. 2.24 (b))	0	1	1	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$	0	0	–1
$\alpha_D m_D$ (Fig. 2.24 (c))	0	0	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$	1	1	1

Como la rigidez a flexión del pórtico es constante, de la ecuación (2.56) se deduce:

$$\oint (\alpha_r m_r) M \, dx = 0 \qquad (2.63)$$

Así, utilizando la expresión (2.59), la primera y segunda líneas de la tabla 2.5 dan

$$h[2M_A + M_B] + h[2M_E + M_D] = 0$$

esto es,

$$2M_A + M_B + M_D + 2M_E = 0 \qquad (2.64)$$

Compárese esta ecuación con la primera de las (2.47).

Análogamente, la primera y tercera líneas de la Tabla 2.5 dan,

$$h[2M_B + M_A] + \frac{l}{2}\left(2M_B + M_C + \frac{1}{2}M_B + M_C\right) + \frac{l}{2}\left(M_C + \frac{1}{2}M_D\right)$$
$$+ h\,(-2M_E - M_D) = 0$$

es decir,

$$\left(4\frac{h}{l}\right)M_A+\left(5+8\frac{h}{l}\right)M_B+6M_C+\left(1-4\frac{h}{l}\right)M_D-8\left(\frac{h}{l}\right)M_E=0 \qquad (2.65)$$

y, finalmente, la distribución $\alpha_D\, m_D$ con la distribución M da

$$M_B+6M_C+\left(5+12\frac{h}{l}\right)M_D+\left(12\frac{h}{l}\right)M_E=0 \qquad (2.66)$$

Las ecuaciones (2.64), (2.65) y (2.66) junto con la (2.61), bastan para determinar los valores de M_A a M_E; la ecuación (2.48) da la solución, a la que hay que añadir

$$M_C=-\frac{Vl}{4}\left(\frac{l+h}{2l+h}\right) \qquad (2.67)$$

Al hacer el ejemplo anterior, las tres distribuciones de auto-solicitación se dedujeron directamente de la línea reactante general; por ejemplo, la distribución de la figura 2.24 (a) corresponde a $m_B = m_D = 0$ en la figura 2.23 (c). Podían ha-

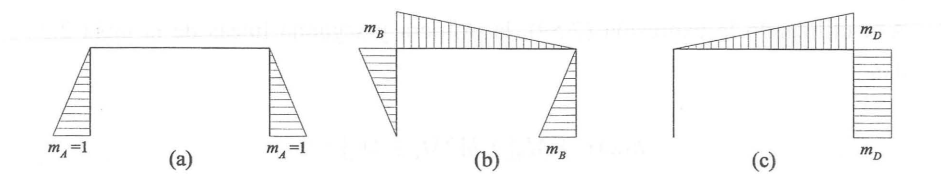


FIGURA 2.24

berse abreviado los cálculos empleando otras distribuciones de auto-solicitación; para este ejemplo, puede usarse *cualquier trío independiente* de distribuciones. Las ecuaciones hubieran sido más sencillas si hubiéramos dado a (m_A, m_B, m_D) los valores (0,1,1), (1,1,0) y (0,0,1), correspondientes a las distribuciones de auto-solicitación de la figura 2.25, puesto que hubiera habido una cierta simetría.

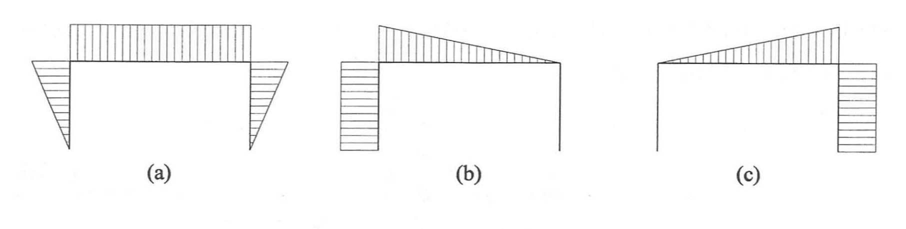


FIGURA 2.25

La exposición anterior sobre el empleo del trabajo virtual se ha dado, no sólo como introducción al uso de los métodos de la energía para estructuras elásticas, sino también como muestra de un método potente que puede usarse cuando los métodos de la energía no son aplicables. En el Capítulo 3 se trata el cálculo de estructuras elasto-plásticas y, en ese caso, es preciso usar el método del trabajo virtual si queremos que los cálculos sean directos.

Métodos de la energía para pórticos elásticos

Considérese la cantidad U definida por

$$U = \oint \frac{M^2\,dx}{2B} \tag{2.68}$$

donde la integración se extiende al pórtico completo. La cantidad U representa la energía de deformación por flexión de una estructura elástica lineal. Según la ecuación (2.55), el momento flector M puede expresarse como la suma del momento flector libre M_w y de los momentos flectores reactantes $\alpha_r m_r$ debidos a las redundancias m_r. Si se deriva la ecuación (2.68) respecto al valor de un momento flector redundante concreto, por ejemplo m_r, entonces

$$\frac{\partial U}{\partial m_r} = \oint \frac{M}{B} \cdot \frac{\partial M}{\partial m_r}\,dx \tag{2.69}$$

De la ecuación (2.55) se deduce que $\partial M/\partial m_r = \alpha_r$, y comparando la ecuación (2.69) con la (2.56), se verá que

$$\frac{\partial U}{\partial m_r} = \oint \alpha_r \frac{M}{B}\, dx = 0 \tag{2.70}$$

Éste es el Teorema de la Compatibilidad de Castigliano, con frecuencia llamado principio de la mínima energía de deformación. La cantidad U es un mínimo con respecto a los valores de cada una de las redundancias; por tanto, de la ecuación (2.70) pueden obtenerse exactamente N ecuaciones a partir de las que se pueden encontrar los valores de las redundancias.

La forma de la ecuación (2.70) es precisamente la misma que la de la ecuación (2.56) que se dedujo por aplicación directa del principio del trabajo virtual. Debe subrayarse que el prinipio de mínima energía de deformación se aplica sólo a estructuras linealmente elásticas y que, por tanto, el teorema $\partial M/\partial m_r = 0$, ecuación (2.70), tiene una validez restringida.

Ejemplo 2.4 (ter). Para mostrar la aplicación del método de la energía se analizará nuevamente el mismo pórtico de la figura 2.23. Para obtener la solución podrían emplearse los mismos diagramas básicos de momentos flectores, pero resulta más instructivo hacer el problema *ab initio* en función de las diferentes redundancias.

En general, se ahorra trabajo si se trata sólo con cargas simétricas y pseudo- o antisimétricas. Por tanto, se realizarán los cálculos separadamente para la carga vertical V y la carga horizontal H. En la figura 2.26 (a), los momentos en la base de los pilares, M_V, son iguales por simetría, de manera que para esta carga el pórtico tiene sólo dos redundancias reales; se ha llamado S a la segunda redundancia: el empuje horizontal en la base.

Bajo la acción de la carga horizontal H, el pórtico presenta una única redundancia real: M_H en la figura 2.26 (b). Para verificar este aserto, la figura 2.27 (a) muestra el pórtico bajo la acción de una carga horizontal H y se han elegido como redundancias las tres cantidades M_A, M_E y P. Si se invierte la dirección de la carga lateral H, se obtendrá la distribución de la figura 2.27 (b); como el pórtico es simétrico, la figura 2.27 (b) corresponde a ver el pórtico de la figura 2.27

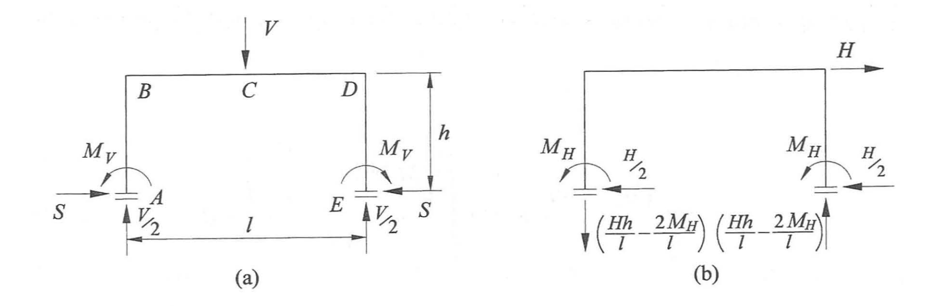


FIGURA 2.26

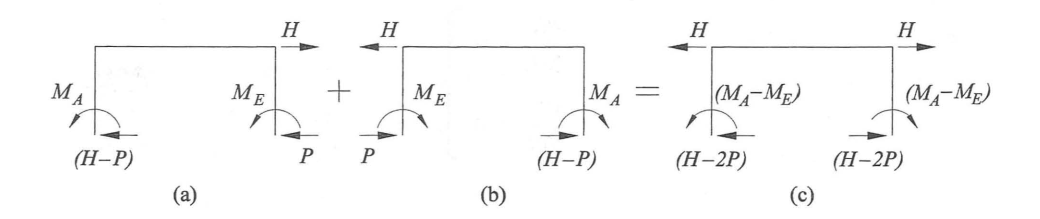


FIGURA 2.27

(a) desde el otro lado. Superponiendo ambos diagramas se obtiene el diagrama de la figura 2.27 (c), donde fuerzas opuestas H actúan en la dirección de la viga; como se desprecian todos los efectos que no sean debidos a la flexión, el pórtico se encuentra realmente descargado. Sin embargo, este estado sin carga produce momentos en la base de los pilares $(M_A - M_E)$; por tanto, $M_A = M_E$. Análogamente, para que no haya empuje en los apoyos, $P = H/2$.

Volviendo al caso de carga simétrica, figura 2.26 (a), el momento flector en el pilar AB puede expresarse como

$$M_{AB} = M_V + Sy \tag{2.71}$$

y en la viga BC como

$$M_{BC} = M_V + Sh - \frac{V}{2}x \tag{2.72}$$

Podemos escribir, por tanto, la energía de deformación U del pórtico completo en la forma

$$U = 2\int_0^h \frac{(M_V + Sy)^2}{2B}\,dy + 2\int_0^{l/2} \frac{\left(M_V + Sh - \frac{V}{2}x\right)^2}{2B}\,dx \tag{2.73}$$

Por la ecuación (2.70),

$$\left.\begin{aligned} \frac{\partial U}{\partial M_V} &= 0 \\ \frac{\partial U}{\partial S} &= 0 \end{aligned}\right\} \tag{2.74}$$

Por tanto,

$$\left.\begin{aligned} &\int_0^h (M_V + Sy)dy + \int_0^{l/2} \left(M_V + Sh - \frac{V}{2}x\right)dx = 0 \\ \text{y} \quad &\int_0^h y(M_V + Sy)dy + \int_0^{l/2} h\left(M_V + Sh - \frac{V}{2}x\right)dx = 0 \end{aligned}\right\} \tag{2.75}$$

Resulta útil derivar bajo el signo integral, ya que este proceso simplifica los integrandos.

Las ecuaciones (2.75) se convierten en

$$\left.\begin{aligned} M_V &= -\frac{Vl^2}{8}\left(\frac{1}{2l + h}\right) \\ Sh &= -3M_V \end{aligned}\right\} \tag{2.76}$$

donde el valor de M_V concuerda, como es natural, con el término debido a V en las expresiones de M_A y M_E en las ecuaciones (2.48). Es posible, ahora, hallar los momentos flectores en todo el pórtico a partir de las ecuaciones (2.71) y (2.72).

Para la carga horizontal (Fig. 2.26 (b)),

$$\left.\begin{aligned} M_{AB} &= M_H - \frac{H}{2}y \\ M_{BC} &= M_H - \frac{Hh}{2} + \left(\frac{Hh - 2M_H}{l}\right)x \end{aligned}\right\} \tag{2.77}$$

Por tanto,

$$U = 2\int_0^h \frac{1}{2B}\left(M_H - \frac{H}{2}y\right)^2 dy$$

$$+\,2\int_0^{l/2} \frac{1}{2B}\left[M_H - \frac{Hh}{2} + \left(\frac{Hh - 2M_H}{l}\right)x\right]^2 dx \tag{2.78}$$

y, por el Teorema de la Compatibilidad de Castigliano, estableciendo $\partial M/\partial M_H = 0$,

$$\int_0^h \left(M_H - \frac{H}{2}y\right) dy + \int_0^{l/2}\left(1 - \frac{2x}{l}\right)\left[M_H - \frac{Hh}{2} + \left(\frac{Hh - 2M_H}{l}\right)x\right]dx = 0 \tag{2.79}$$

Resolviendo esta ecuación,

$$M_H = \frac{Hh}{2}\left(\frac{l + 3h}{l + 6h}\right) \tag{2.80}$$

resultado que puede compararse con las expresiones apropiadas en las ecuaciones (2.48).

Como se ha visto en el anterior ejemplo, la aplicación del Teorema de Compatibilidad de Castigliano es directa. Para pórticos elásticos el método presenta una ligera ventaja sobre el del trabajo virtual, ya que los signos asignados a los momentos flectores no tienen ninguna importancia. En efecto, al depender la energía de deformación de $M^2/2B$, los momentos flectores pueden introducirse como

positivos o negativos sin que haya variación alguna. Sin embargo, cualquier ventaja desaparece si el problema elástico se complica con consideraciones de falta de ajuste inicial, deformaciones térmicas, etc. Y no hay que olvidar que los teoremas de la energía de deformación no se aplican a pórticos anelásticos.

Las mismas consideraciones se aplican al cálculo de las flechas; no obstante, citaremos la Parte II del Teorema de Castigliano, conocido normalmente como Primer Teorema de Castigliano. Si queremos hallar el desplazamiento δ_i en un cierto punto de una estructura sobre la que actúa una carga W_i, donde δ_i se mide en la dirección de W_i, entonces el Teorema de Castigliano, Parte II establece que

$$\frac{\partial U}{\partial W_i} = \delta_i \tag{2.81}$$

Si no actúa ninguna carga en la sección elegida *i*, se introduce entonces en el análisis una carga «ficticia» W_i, cuyo valor finalmente se iguala a cero.

Ejemplo 2.4 (continuación). Supongamos que se quiere hallar el desplazamiento lateral δ_H en la cabeza de los pilares del pórtico (Fig. 2.23). Es evidente, a partir de la figura 2.26, que la carga vertical V no producirá ningún desplazamiento lateral; sólo es necesario, por tanto, considerar el sistema de carga de la figura 2.26 (b). Tomando la ecuación (2.78) y haciendo $\delta_H = \partial U/\partial H$,

$$\delta_H = \frac{1}{B}\int_0^{l/2} y\left(\frac{H}{2}y - M_H\right)dy + \frac{1}{B}\int_0^{l/2} h\left(\frac{2x}{l} - 1\right)\left[M_H - \frac{Hh}{2} + \left(\frac{Hh - 2M_H}{l}\right)x\right]dx \tag{2.82}$$

esto es,

$$B\delta_H = \frac{Hh^2}{12}(l + 2h) - \frac{M_H h}{6}(l + 3h) \tag{2.83}$$

Nótese que al hacer la derivada parcial de U con respecto a H, el momento flector M_H se ha considerado constante; no es necesario sustituir el valor de M_H antes de derivar. El valor de M_H viene dado por la ecuación (2.80), de manera que, sustituyendo, se obtiene

$$\delta_H = \frac{Hh^3}{12B}\left(\frac{2l+3h}{l+6h}\right) \tag{2.84}$$

Teorema de la reciprocidad

El teorema de la reciprocidad se aplica a estructuras linealmente elásticas y, en ocasiones, puede servir para simplificar el análisis. Más importante, el teorema de la reciprocidad conduce a la teoría de análisis con modelos, tema que se discutirá brevemente en el siguiente apartado.

Consideremos una estructura elástica, dibujada en forma esquemática en la figura 2.28; se han elegido dos puntos 1 y 2 sobre los que se definen dos direcciones. En la figura 2.28 (a) la carga W_1, que actúa en el punto 1 según una direc-

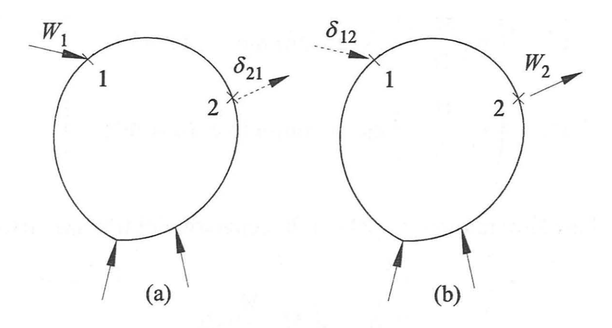


FIGURA 2.28

ción dada, produce un desplazamiento δ_{21} en el punto 2, midiéndose este desplazamiento según la dirección especificada para dicho punto. Análogamente,

la figura 2.28 (b) muestra una carga W_2 que, actuando en el punto 2, produce un desplazamiento δ_{12} en el punto 1. En estas condiciones, el teorema de la reciprocidad afirma que

$$W_1\delta_{12} = W_2\delta_{21} \tag{2.85}$$

En particular, si $W_1 = W_2$, entonces $\delta_{12} = \delta_{21}$. Se ha ilustrado el teorema para cargas puntuales, pero se aplica también a pares de fuerzas, momentos y giros.

Si, por ejemplo, se sustituye la carga W_1 por un momento T_1 y el desplazamiento δ_{12} por el giro θ_{12}, entonces

$$T_1\theta_{12} = W_2\delta_{21} \tag{2.86}$$

La demostración del teorema es sencilla, y el esquema siguiente servirá para ilustrar la naturaleza de la demostración general. Llamemos M_1 a los momentos flectores reales que la carga W_1 produce en la estructura, y M_2 a los producidos por la carga W_2. Se pueden hacer las siguientes afirmaciones:

$$\left.\begin{array}{ll} \text{A:} & (W_1, M_1) \text{ es un conjunto en equilibrio} \\ \text{B:} & (W_2, M_2) \text{ es un conjunto en equilibrio} \\ \text{C:} & \left(\delta_{21}, \dfrac{M_1}{B}\right) \text{ es un conjunto compatible} \\ \text{D:} & \left(\delta_{12}, \dfrac{M_2}{B}\right) \text{ es un conjunto compatible} \end{array}\right\} \tag{2.87}$$

Combinando las afirmaciones A y D con la ecuación del trabajo virtual

$$W_1\delta_{12} = \oint M_1 \frac{M_2}{B}\,dx \tag{2.88}$$

Análogamente, las afirmaciones B y C dan

$$W_2\delta_{21} = \oint M_2 \frac{M_1}{B}\,dx \tag{2.89}$$

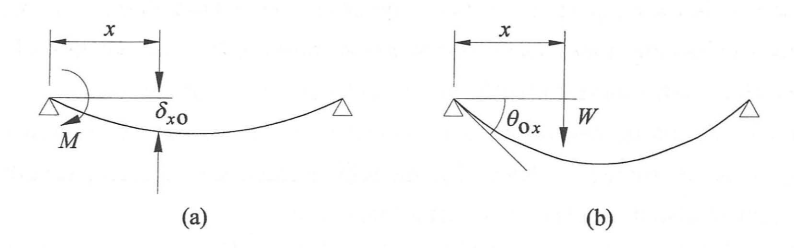


FIGURA 2.29

La comparación de las ecuaciones (2.88) y (2.89), demuestra que la ecuación (2.85) es correcta. Nótese que las curvaturas $\kappa_1 = M_1/B$ en la afirmación C se han formulado empleando la ecuación elástica fundamental, de modo que la demostración dada se aplica sólo a estructuras elásticas.

Ejemplo 2.5. Supongamos que se quiere hallar la deformada de una viga simplemente apoyada producida por un momento M aplicado en uno de sus extremos. Se quiere hallar la flecha δ_{x0}, figura 2.29 (a), para cualquier valor de x. En la figura 2.29 (b) se muestra una carga W actuando sobre la viga, siendo la rotación en su extremo θ_{0x}. Aplicando la ecuación (2.86)

$$M\theta_{0x} = W\delta_{x0} \tag{2.90}$$

Dado que θ_{0x} viene dado en la tabla 2.2, se deduce que

$$\delta_{x0} = M\frac{\theta_{0x}}{W} = \frac{M}{6Bl}x(l-x)(2l-x) \tag{2.91}$$

Por supuesto, esta expresión puede obtenerse también por integración directa.

Análisis con modelos

Muchas estructuras son tan complejas que su análisis exacto resulta difícil. Pueden escribirse las ecuaciones fundamentales, pero su resolución puede ser extremadamente laboriosa. También es posible usar programas hechos de ordenador o

escribir programas específicos para cualquier problema. Otra alternativa, una vez planteadas las ecuaciones, es utilizar métodos aproximados; uno de ellos, el de la redistribución de momentos se discutirá en el siguiente apartado.

En la oficina de cálculo pueden realizarse análisis rápidos y sorprendentemente exactos usando modelos. Los modelos pueden ser de acero, si se busca una gran precisión, de plástico o, incluso de cartón.

Nótese que la deformación elástica de un pórtico es de la forma $y = C \cdot Wl^3/B$, donde W es una carga, B una rigidez a flexión y l una dimensión del pórtico; C es una constante para cada punto del pórtico. Supongamos que hacemos y ensayamos un modelo con las siguientes propiedades $l/l_m = S_l$, $B/B_m = S_B$, $W/W_m = S_W$, donde el subíndice m se refiere al modelo y las cantidades S son factores de escala. Si, por ejemplo, $S_l = 4$ esto significa que las dimensiones lineales del modelo son un cuarto de las de la estructura real; si $S_W = 10$, las cargas empleadas al cargar el modelo serán la décima parte de las reales. Por supuesto, la relación S_B tiene que mantenerse constante en cada sección del pórtico; si en un pórtico de un vano la viga tiene una rigidez a flexión doble que los pilares, lo mismo tiene que suceder en el modelo. Si algún elemento del pórtico tiene sección variable, la rigidez a flexión B_m del modelo debe variar de la misma manera.

No obstante, si la relación $S_B = B/B_m$ debe mantenerse constante en todo el pórtico, no ocurre lo mismo con la forma de la sección que puede elegirse libremente. El modelo de un pórtico real formado con perfiles en I puede tener los elementos rectangulares; si, por ejemplo, el modelo se corta de un cartón de espesor constante, entonces el canto d_m de cada elemento debe ser tal que d_m^3 sea proporcional a la rigidez a flexión requerida.

Si en todo el modelo se mantienen los factores de escala en la forma antedicha, la relación entre las deformaciones, para una sección dada, entre el pórtico real y el modelo, será

$$\frac{y_m}{y} = \frac{S_B}{(S_W)(S_l)^3} = \beta \qquad (2.92)$$

y esta relación β es constante en todo el pórtico. Todas las deformaciones en el modelo serán β veces los deformaciones correspondientes en el pórtico real.

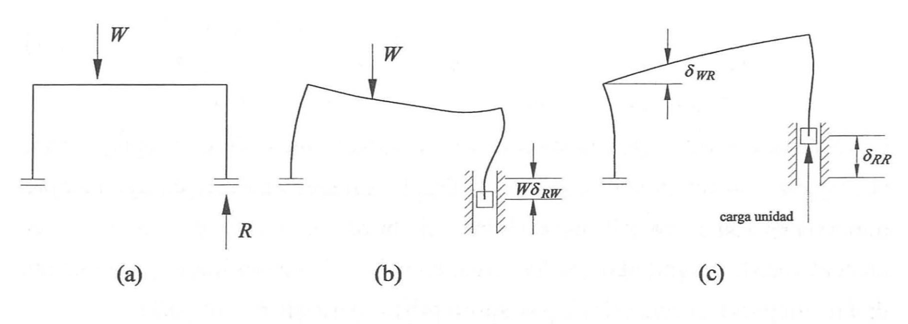


FIGURA 2.30

Como se verá, sólo se precisan las relaciones de deformaciones para el *modelo*, de manera que el factor de escala combinado β no aparecerá en los cálculos.

Como ejemplo de un análisis con modelo, consideremos el pórtico de un vano que soporta una carga W de la figura 2.30 (a). Se quiere encontrar la reacción vertical R en la base de uno de los pilares. Supongamos que se hace un modelo a *tamaño natural* del pórtico, y que se construye de modo que la base del pilar en cuestión puede moverse libremente en dirección vertical, pero no puede moverse en horizontal ni girar. En la figura 2.30 (b), la base del pilar desciende una cantidad $W\delta_{RW}$ al actuar la carga W, donde δ_{RW} es el descenso debido a una carga *unidad*. Se realiza otro ensayo en el modelo como se muestra en la figura 2.30 (c). Una carga vertical unidad actúa sobre la base del pilar, produciendo un desplazamiento δ_{RR} en su base, y un desplazamiento δ_{WR} en el punto en el que se aplicó la carga en el primer ensayo.

Superpongamos ahora los modelos de las figuras 2.30 (b) y (c). Para reproducir el comportamiento del pórtico original, la base del pilar no debe descender. Si sustituimos la carga unidad de la figura 2.30 (c) por la carga R, el movimiento vertical de la base de la columna será $R\delta_{RR}$, y la condición de inmovilidad de la base será obviamente

$$W\delta_{RW} = R\delta_{RR} \tag{2.93}$$

Por el teorema de la reciprocidad, el desplazamiento δ_{RW} de la figura 2.30 (b) tiene que ser igual a δ_{WR} en la figura 2.30 (c); por tanto, podemos rescribir la ecuación (2.93) en la forma

$$R = \frac{\delta_{WR}}{\delta_{RR}} W \tag{2.94}$$

La relación δ_{WR}/δ_{RR} de la ecuación (2.94) se refiere únicamente al segundo ensayo, figura 2.30 (c). Además, como los desplazamientos en este ensayo son proporcionales a la carga aplicada en la base de la columna, esta relación no se verá afectada por la magnitud de dicha carga. Es más, si hacemos que δ_{RR} sea una unidad de longitud, la ecuación (2.94) se simplifica para dar $R = (\delta_{WR})W$.

Por tanto, para hallar el valor de R lo único que se necesita es mover la base del pilar una unidad de longitud en la dirección de R, sin permitir su rotación o movimiento lateral, y medir el correspondiente desplazamiento δ_{WR} del punto de aplicación de la carga. Se ha discutido el uso de un modelo a tamaño real; es evidente, que si se construye un modelo a escala siguiendo los principios citados anteriormente, la *relación* δ_{WR}/δ_{RR} no se verá afectada.

El ejemplo anterior trataba de hallar sólo una cantidad; otro ejemplo bastará para mostrar cómo el análisis con modelos puede aplicarse a pórticos más complicados.

Ejemplo 2.6. En la figura 2.31 (a) se muestra el dibujo de un pórtico de hormigón armado que debe soportar una grúa móvil en su parte superior. El pórtico es de sección variable y sería muy difícil realizar un análisis exacto. Se quieren hallar los momentos flectores en el pórtico a medida que la carga W se desplaza a lo largo de la viga; se considera suficiente hallar los momentos para la carga W situada en, digamos, diez posiciones distintas. La figura 2.31 (b) muestra un diagrama lineal del pórtico; como el pórtico tiene sus apoyos empotrados, el análisis completo requiere determinar tres cantidades y se han elegido como redundancias los momentos en la base de los pilares, M_A y M_B, y el empuje horizontal en los apoyos P.

Se hacen dos modelos del pórtico, con las rigideces de flexión proporcionadas adecuadamente. El primer modelo se ensaya con los apoyos articulados; éstos se acercan entre sí una distancia $\delta = 1$ cm, midiéndose los giros θ_A y θ_B en la base de los pilares. Al mismo tiempo, se miden los desplazamientos y_1 en 10 posiciones diferentes. Este ensayo se muestra en la figura 2.31 (c). Después, el mismo modelo se ensaya como se muestra en la figura 2.31 (d); los apoyos articulados permanecen fijos, sin acercarse o separarse, y se impone una rotación $\theta_A = 0{,}100$

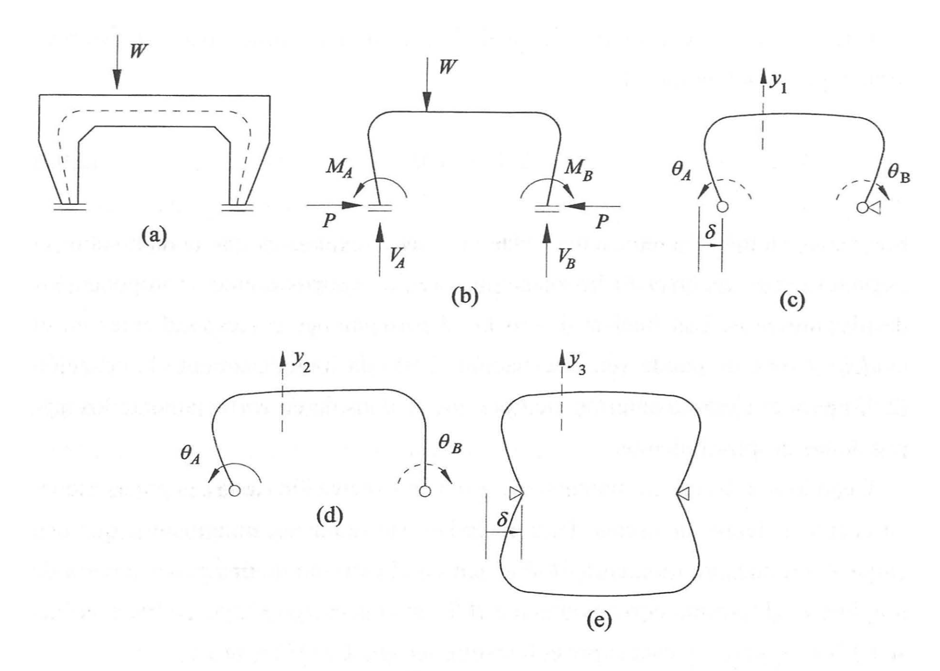


FIGURA 2.31

radianes a la base del pilar izquierdo. Se miden la rotación θ_B y los desplazamientos y_2.

El segundo modelo se fabrica como un anillo completo formado uniendo el pórtico y su imagen especular rígidamente en sus bases. Se ensaya el modelo produciendo un acercamiento de los apoyos $\delta = 1$ cm, midiéndose los desplazamientos y_3. Los resultados de los ensayos se resumen en la siguiente tabla:

TABLA 2.6

	δ, cm	θ_A, rad.	θ_B, rad.	Flechas de la viga (cm)
Ensayo 1	1,00	0,064	0,064	$-y_1$
Ensayo 2	0	0,100	–0,025	$-y_2$
Ensayo 3	1,00	0	0	$-y_3$
Fuerzas reales	P	M_A	M_B	W

Para escribir las ecuaciones del análisis con modelos ordenadamente, es preferible que tomen la forma

$$\Sigma\, W_n \delta_n = 0 \tag{2.95}$$

En esta ecuación, W_n representa todas las cargas exteriores que actúan sobre la estructura *real*, *incluyendo* las reacciones en los apoyos donde se imponen los desplazamientos. Las flechas δ_n son las deformaciones correspondientes en el *modelo*. Como se puede ver, la ecuación (2.95) da inmediatamente la ecuación (2.93) para el ejemplo anterior, siempre que se consideren correctamente los signos de los desplazamientos.

Cuando se introducen momentos y giros en la ecuación (2.95) es preciso tener en cuenta el factor de escala. Para entender este requisito, imaginemos que una carga W produce un momento M al actuar en el extremo de una palanca corta de longitud l. El término correspondiente $W\delta_m$ en la ecuación (2.95) podría escribirse $(Wl)(\delta_m/l_m)(l_m/l)$, y esta expresión resulta ser igual a $(M)(\theta_m)/(S_l)$.

En el ejemplo que nos ocupa, la aplicación de la ecuación (2.95) a los tres ensayos de la tabla 2.6 da

$$\left.\begin{aligned}
&(P)(1) + (M_A)(0{,}064)/(S_l) + (M_B)(0{,}064)/(S_l) + (W)(-y_1) = 0\\
&(P)(0) + (M_A)(0{,}100)/(S_l) + (M_B)(-0{,}025)/(S_l) + (W)(-y_2) = 0\\
&(P)(1) + (M_A)(0) + (M_B)(0) + (W)(-y_3) = 0
\end{aligned}\right\} \tag{2.96}$$

de donde si, por ejemplo, $S_l = 40$, se obtiene

$$\left.\begin{aligned}
M_A &= (125y_1 + 320y_2 - 125y_3)W\\
M_B &= (500y_1 - 320y_2 - 500y_3)W\\
P &= (y_3)W
\end{aligned}\right\} \tag{2.97}$$

Como se conocen los valores de y_1, y_2 e y_3 en diez posiciones distintas de la viga, pueden construirse las líneas de influencia de M_A, M_B y P para la carga unidad W.

Redistribución de momentos

Para terminar la discusión sobre métodos aproximados de análisis elástico es preciso mencionar el método de la redistribución de momentos. Hay muchas otras técnicas de análisis estructural que no se han discutido, tanto exactas como aproximadas, pero la redistribución de momentos es una herramienta muy potente para estudiar estructuras muy redundantes. Brevemente: el método empieza con un estado hipotético de deformación compatible del pórtico, y, después, se ajustan sucesivamente las deformaciones de modo que se satisfagan las ecuaciones de equilibrio.

Las cantidades fundamentales que se precisan para la redistribución de momentos son los *factores de transmisión* y los *factores de reparto*. Consideremos en primer lugar una viga empotrada-apoyada, figura 2.32, en cuyo extremo apoyado actúa un momento flector M. Puede comprobarse, usando por ejemplo las ecuaciones (2.38) de pendiente-flecha, que el momento inducido en el extremo empotrado es $\frac{1}{2}M$. El *factor de transmisión* para esta viga de sección constante se define como $\frac{1}{2}$. Si la viga es de sección variable el factor de transmisión no será $\frac{1}{2}$, sino que tendrá un valor que depende de la ley de variación de la sección.

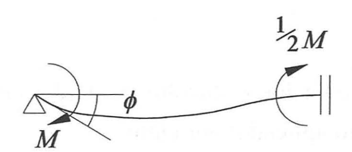


FIGURA 2.32

Puede también comprobarse que el giro ϕ en la figura 2.32 vale $Ml/4B$. Consideremos ahora un conjunto de elementos de sección constante que concurren en un punto común O, como aparece en la figura 2.33; llamaremos l_r y B_r a la longitud y rigidez a flexión de un elemento cualquiera. Los extremos de los elementos opuestos a O, se supondrán empotrados, y los que concurren en O rígidamente unidos entre sí. Supongamos, ahora, que se aplica un momento M en el nudo O; el problema es saber cómo se *redistribuye* dicho momento M entre los distintos elementos, esto es, qué parte del momento se transmite a cierto elemento r.

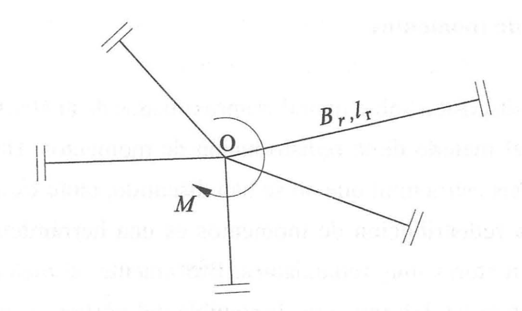


FIGURA 2.33

Si el nudo O gira un ángulo ϕ, entonces, como todos los elementos están conectados rígidamente, el momento flector M_r producido en O sobre el elemento r viene dado por

$$\phi = \frac{M_r l_r}{4B_r} \tag{2.98}$$

o bien

$$M_r = \frac{4B_r}{l_r} \tag{2.99}$$

Ahora bien, la suma de todos los momentos inducidos en los elementos tiene que ser igual a M, el momento aplicado; por tanto

$$M = \Sigma\, M_r = 4\phi \sum \frac{B_r}{l_r} \tag{2.100}$$

Así, combinando las ecuaciones (2.99) y (2.100),

$$M_r = \frac{B_r/l_r}{\Sigma\, B_r/l_r} M = \frac{k_r}{\Sigma\, k_r} M \tag{2.101}$$

donde $k_r = B_r/l_r$ es la *rigidez* del elemento r. El *factor de reparto* se define como $k_r/\Sigma k_r$.

Este factor de reparto se ha calculado en la hipótesis de que los extremos opuestos al nudo de todos los elementos estaban empotrados, que será la situación habitual en un proceso de redistribución de momentos. No obstante, en ocasiones resulta conveniente emplear factores de reparto de elementos cuyos extremos están articulados. A partir de la tabla 2.2 puede verse que la rotación ϕ en la ecuación (2.98) es igual a $M_r\, l_r/3B_r$ si el extremo opuesto del elemento r está articulado. Por tanto, si se toma como rigidez efectiva del miembro r no B_r/l_r sino $\frac{3}{4}B_r/l_r$, la fórmula de la ecuación (2.101) seguirá siendo válida.

Nuevamente, lo mejor será ilustrar la aplicación del método de redistribución de momentos mediante un ejemplo.

Ejemplo 2.7. La viga continua de la figura 2.34 tiene las cargas y dimensiones que se especifican. La sección de la viga cambia sobre los apoyos; la información necesaria para resolver el problema se expone en la tabla 2.7.

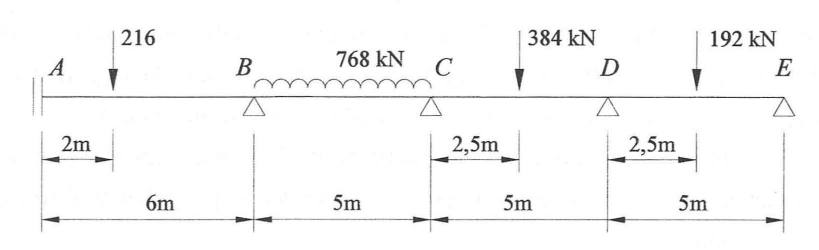


FIGURA 2.34

En la última línea de la tabla 2.7 aparecen los momentos de empotramiento para cada uno de los tramos. Estos momentos son los valores iniciales para empezar el proceso de redistribución y se han considerado positivos si actúan sobre las vigas en el sentido de las agujas del reloj. Este convenio de signos resulta adecuado para la redistribución de momentos y es distinto del convenio empleado en el resto del libro.

Imaginemos todos los nudos de la viga rígidamente sujetos por algún agente externo: al recibir la carga, la viga se deformará de forma compatible pero no hay equilibrio. Por ejemplo, los momentos flectores en el apoyo B están *desequilibrados*; en el tramo AB, un momento positivo de 96 kNm no equilibra el momento

TABLA 2.7

Vano	AB		BC		CD		DE	
Longitud, m	6		5		5		5	
Rigidez a flexión, B	$2B_0$		$1{,}5B_0$		B_0		B_0	
Rigidez $\frac{B}{l}\left(\times\frac{60}{B_0}\right)$	20		18		12		$\frac{3}{4}(12)$	
Factores de reparto		0,526	0,474	0,6	0,4	0,571	0,429	
Momentos de empotramiento, kN m	–192	96	–320	320	–240	240	–120	120

negativo de 320 kNm del tramo *BC*. El agente externo debe suministrar la diferencia de 224 kNm entre ambos valores; por supuesto, para la viga real este agente externo no existe. Por tanto, para satisfacer el equilibrio, al menos en el nudo *B*, es preciso superponer allí un momento de 224 kNm. Los cálculos pueden ordenarse de manera que el proceso de equilibrado se produzca de forma rápida y cómoda.

La tabla 2.8 presenta los factores de reparto y los momentos de empotramiento en las líneas 1 y 2. El nudo *B* se equilibra en la línea 3. El momento equilibrante de 224 kNm se imagina como actuando sobre una estructura descargada, y la distribución resultante se suma en la línea 2. Al aplicar los momentos equilibrantes, todos los nudos excepto el *B* (p. ej., *A*, *C*, *D*, *E*) permanecen fijos. Por tanto, el momento equilibrante se repartirá entre los tramos *BA* y *BC* en razón de sus factores de reparto, 117 kNm hacia el tramo *BA* y 107 kNm hacia el tramo *BC*. Se traza una línea bajo los valores equilibrantes, la línea 3 en la Tabla 2.8, para indicar que el nudo *B* está ahora en equilibrio.

Ya se ha visto (Fig. 2.32) que el factor de transmisión para una viga de sección constante es 1/2. Por tanto, la aplicación de un momento de 117 kNm en el extremo *B* del tramo *AB* producirá un momento de 59 kNm en el extremo *A*. Los dos momentos transmitidos se muestran en la línea 4 de la tabla. Veamos el senti-

TABLA 2.8

Línea	A	B	B	C	C	D	D	E
1 Factores de reparto		0,526	0,474	0,6	0,4	0,571	0,429	
2 Momentos de empotramiento	–192	96	–320	320	–240	240	–120	120
3 Equilibrio B		117	107					
4 Transmisión línea 3	59			53				
5 Equilibrio C y E				–80	–53			–120
6 Transmisión línea 5			–40			–27	–60	
7 Equilibrio B y D		21	19			–19	–14	
8 Transmisión línea 7	11			9	–9			
9 Momentos flectores totales	–122	234	–234	302	–302	194	–194	0

do físico: la distribución de momentos flectores de la línea 1 corresponde a una viga continua con momentos flectores externos aplicados en los apoyos; estos momentos flectores externos tienen una magnitud tal que la pendiente de la viga en cada apoyo es horizontal. En la línea 4, la viga permanece todavía horizontal sobre los apoyos *A*, *C*, *D* y *E*; los momentos externos actúan todavía en esos nudos. En el nudo *B*, por el contrario, la viga ya no está horizontal; el equilibrio se ha alcanzado permitiendo que el nudo gire.

El extremo *A* de la viga debe, por supuesto, permanecer horizontal, puesto que está empotrado y un momento externo puede actuar allí. El extremo *E*, sin embargo, está simplemente apoyado y no puede tener ningún momento. Por tanto, en la línea 5 de la tabla 2.8 se ha superpuesto en *E* un momento flector de

–120 kNm; éste transmite un momento de –60 kNm hacia el nudo *D*, línea 6. Nótese que la rigidez del tramo *DE* en la tabla 2.7 se ha introducido como tres cuartos de su valor; como consecuencia de esto, el proceso de equilibrado en el extremo apoyado sólo precisa realizarse una vez, no quedando más momentos que equilibrar. (Nótese que no hay más momentos transmitidos hacia *E* en la línea 8.)

Es posible equilibrar varios nudos a la vez; en la línea 5 se han equilibrado a la vez los nudos *C* y *E*. Debido a los momentos transmitidos de la línea 6, el nudo *B* está de nuevo desequilibrado; este nudo y el *D* se equilibran en la línea 7. Los momentos transmitidos en la línea 8 al nudo *C* se equilibran exactamente, de manera que no es preciso continuar el proceso de ajuste de la solución. Si no se hubieran equilibrado el proceso se podría repetir; los momentos desequilibrados se reducen en cada etapa, hasta que su valor es insignificante.

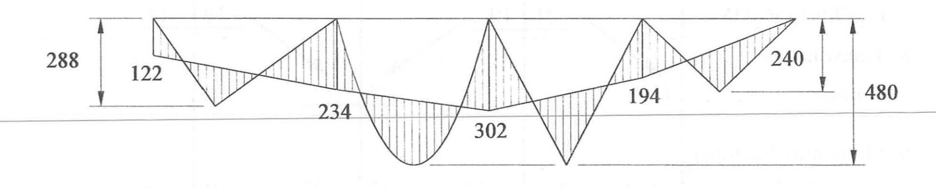


FIGURA 2.35

La última línea de la tabla 2.8 da la suma de todos los momentos flectores en cada columna de la tabla, que son los valores de los momentos flectores en los nudos. Recordando que los momentos en sentido horario sobre los elementos son positivos, se verá que todos los momentos sobre los apoyos son negativos, mientras que la suma neta en cada nudo es cero, indicando que se ha alcanzado un equilibrio exacto. Resulta sencillo ahora dibujar el diagrama completo de momentos flectores para la viga. Se pueden dibujar los momentos libres como en la figura 2.35. La línea reactante queda definida por el resultado de la redistribución de momentos, y el diagrama rayado muestra los momentos flectores netos.

Ejemplo 2.8. Como último ejemplo numérico se estudiará la redistribución de momentos para el pórtico de uno de los ejemplos anteriores, figura 1.15. Se supondrá que el pórtico es de sección constante y que la luz es doble de la altura,

$l = 2h$. Resulta conveniente analizar por separado el efecto de las cargas horizontales y verticales; se obtendrán, por tanto, dos distribuciones para los estados de carga de la figura 2.36.

Para la carga vertical, los momentos de empotramiento valen $(V)(2h)/8$, a partir de la tabla 2.3. Dado que para el proceso de redistribución es preciso usar números, supondremos que $Vh/4$ es igual a 1000 unidades. Se puede ahora realizar la redistribución, tal y como aparece en la tabla 2.9; sumando cada una de las columnas se verá que los valores numéricos de los momentos flectores en A y B son 400 y 800 unidades, respectivamente. Como $Vh = 4000$ unidades, los valores son 0,100 Vh y 0,200 Vh, respectivamente. Recordando que los momentos de sentido horario son positivos en el proceso de redistribución, los momentos flectores debidos a la carga vertical pueden escribirse en la forma

TABLA 2.9

	$\frac{2}{3}$	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{3}$	$\frac{2}{3}$
		−1,000	1,000	
	667	333	−333	−667
		−167	167	
	111	56	−56	−111
800		−28	28	
	19	9	−9	−19
		−5	5	
	3	2	−2	−3
		−1	1	
	333			−333
	56			−56
400	9			−9
	2			−2

$$\left.\begin{aligned} M_A &= -0{,}100\ Vh \\ M_B &= \ \ 0{,}200\ Vh \\ M_D &= \ \ 0{,}200\ Vh \\ M_E &= \ \ 0{,}100\ Vh \end{aligned}\right\} \qquad (2.102)$$

y estos valores se pueden comparar con los valores exactos 1/10 Vh y 1/5 Vh obtenidos de la ecuación (2.48); los signos de los momentos de la ecuación (2.102) corresponden al convenio de que los momentos que producen tracción en el exterior del pórtico son positivos.

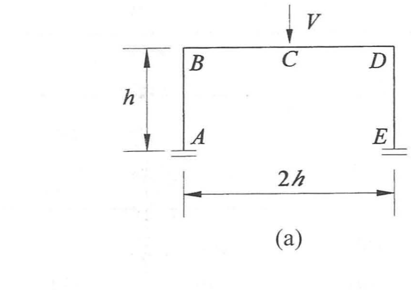
Al realizar la redistribución de la tabla 2.9 se ha hecho implícitamente la suposición de que el pórtico no se mueve/desplaza lateralmente; los nudos B y D estaban fijos no sólo en dirección, sino también en *posición*. Por simetría, es evidente que no hay movimiento lateral bajo la carga V. Sin embargo, bajo la acción de la carga horizontal H se producirá un desplazamiento lateral, que inducirá en el pórtico un estado de flexión; los momentos flectores consiguientes asegurarán el equilibrio. Quizá la mejor manera de hallar este desplazamiento lateral sea resolver el problema a la inversa: imponer un desplazamiento arbitrario y, después, calcular la carga horizontal a que corresponde.

En la figura 2.36 (c) el pórtico ha sufrido un desplazamiento lateral δ manteniendo fija la dirección de los nudos B y D. Los pilares AB y ED resultan flectados con doble curvatura y, supondremos que la magnitud del desplazamiento lateral δ es tal que los momentos inducidos en cada extremo de cada pilar tienen una magnitud de 1000 unidades. Empleando los coeficientes de desplazamiento de la tabla 2.1 resulta sencillo deducir que

$$\delta = \frac{(1000)h^2}{6B} \qquad (2.103)$$

Si sólo se buscan los valores de los momentos, la ecuación (2.103) no será necesaria, pero servirá para calcular el desplazamiento lateral final.

En el proceso de redistribución se mantiene fija la *posición* de los nudos B y D, figura 2.36 (c), pero éstos pueden girar. Los nudos están desequilibrados; por ejemplo el nudo B presenta un desequilibrio de 1000 unidades; la tabla 2.10 da la redistribución, y los momentos finales son



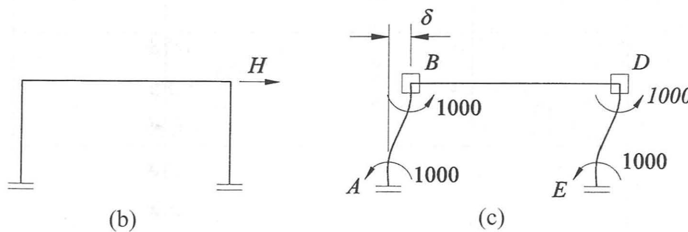


FIGURA 2.36

$$\left.\begin{aligned} M_A &= -716 \\ M_B &= -428 \\ M_D &= 428 \\ M_E &= -716 \end{aligned}\right\} \qquad (2.104)$$

Ahora bien, para que se mantenga el equilibrio, tiene que satisfacerse la ecuación (2.21), esto es,

$$Hh = M_A - M_B + M_D - M_E \qquad (2.105)$$

El valor del desplazamiento lateral era arbitrario; si se multiplican los valores de la ecuación (2.104) por un factor x, entonces la ecuación (2.105) nos da

$$2288x = Hh \qquad (2.106)$$

de manera que, finalmente

$$\left.\begin{aligned} M_A = -M_E &= 0{,}313\ Hh \\ -M_B = M_D &= 0{,}187\ Hh \end{aligned}\right\} \qquad (2.107)$$

Tabla 2.10

	$\frac{2}{3}$	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{3}$	$\frac{2}{3}$
	–1,000			–1.000
	667	333	333	667
		167	167	
	–111	–56	–56	–111
–428				
		–28	–28	
	19	9	–9	19
		5	5	
	–3	–2	–2	–3
		–1	–1	
	–1.000			–1.000
	333			333
–716	–56			–56
	9			9
	–2			–2

Pueden compararse estos valores con los valores exactos $\frac{5}{16}$ Hh y $\frac{3}{16}$ Hh obtenidos de la ecuación (2.48). Podemos también multiplicar el desplazamiento lateral δ por el mismo factor x; entonces, a partir de la ecuación (2.103) se obtiene $\delta = Hh^3/13{,}73B$. Compárese este valor con el exacto $7Hh^3/96B = Hh^3/13{,}71B$, obtenido de la ecuación (2.84).

Para un pórtico de varios pisos sería preciso realizar una redistribución de momentos para un desplazamiento arbitrario de *cada* piso. Para calcular el desplazamiento real en cada piso se aplicarían factores x_1, x_2, etc... a los resultados de cada redistribución, escribiéndose a continuación las ecuaciones de equilibrio. Estas ecuaciones forman un sistema de ecuaciones a partir del cual se podrían

obtener los factores x_1, x_2, etc..., y la distribución final de momentos. Tratándose de pórticos en altura, los cálculos pueden acelerarse si se realiza una buena conjetura de la deformación final del pórtico. Los nudos se desplazan a sus posiciones estimadas y la redistribución de los momentos resultantes en los pilares se realiza en la forma acostumbrada. Esta distribución tiene que ser multiplicada por un factor x_1 (por ejemplo) cuando finalmente se satisfacen las ecuaciones de equilibrio. Las otras distribuciones por desplazamiento lateral se realizan en la forma habitual, para cada una de las plantas, pero es preciso eliminar una de ellas puesto que está implícita en la distribución correspondiente al desplazamiento (global) estimado. Si la conjetura ha sido buena, los factores x_2, x_3, etc..., será pequeños, ya que representan correcciones en la forma «adivinada.» Esto significa que el sistema de ecuaciones a partir del cual se obtendrán los factores x podrá ser resuelto rápidamente por un proceso iterativo.

En la figura 2.37 (a) se presenta otro ejemplo que recoge la mayor parte de las ideas fundamentales expuestas hasta ahora; este problema no se resolverá numé-

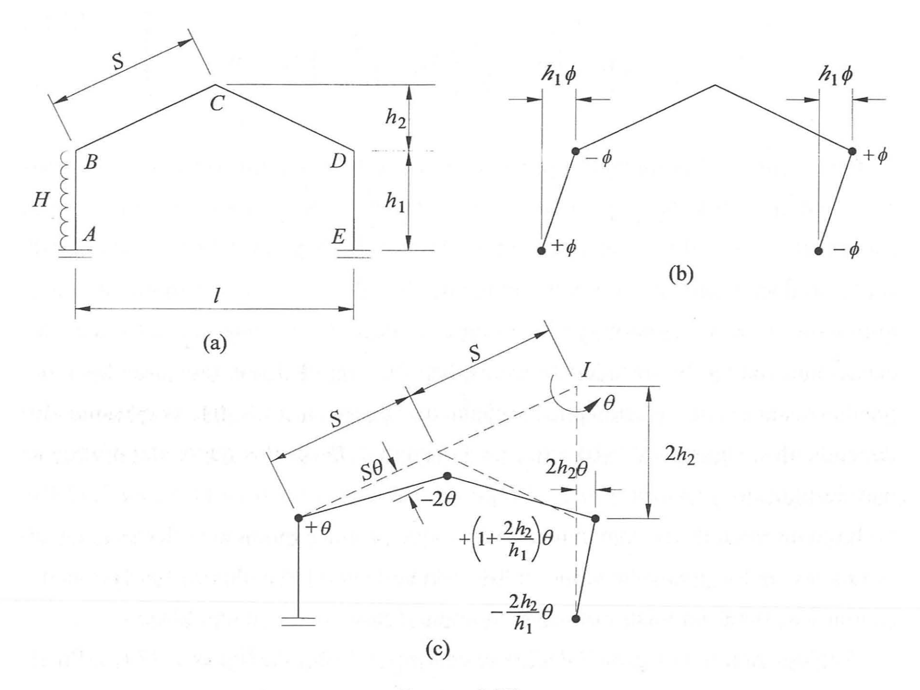


FIGURA 2.37

ricamente. El pórtico a dos aguas de la citada figura soporta una carga horizontal uniformemente distribuida de magnitud total H sobre el pilar AB. El diagrama de momentos del pórtico se podrá construir si se conocen los momentos flectores en los cinco puntos cardinales A-E. Como el pórtico tiene tres redundancias, tiene que haber dos ecuaciones de equilibrio que relacionen los cinco valores citados. Estas ecuaciones pueden deducirse de los dos mecanismos independientes de las figuras 2.37 (b) y (c); el lector puede verificar los valores de los signos en las articulaciones indicados en las figuras. Los giros en la figura 2.37 (c) se han referido al giro θ de la viga CD alrededor del centro instantáneo de rotación I. Como $IC = CB$, es evidente que el giro de la viga BC es también θ, de manera que en C se produce una discontinuidad de articulación de valor 2θ. El movimiento horizontal en D es $2h_2\theta$, que lleva al giro de articulación mostrado en E. Las dos ecuaciones de equilibrio son

$$\left.\begin{aligned} M_A - M_B \qquad\qquad + M_D \qquad\qquad - M_E &= \frac{1}{2} H h_1 \\ M_B - 2M_c + \left(1 + \frac{2h_2}{h_1}\right) M_D - \left(\frac{2h_2}{h_1}\right) M_E &= 0 \end{aligned}\right\} \quad (2.108)$$

Para resolver el problema es preciso realizar tres redistribuciones de momentos por separado. En la primera, dibujada en la figura 2.38 (a), todos los nudos están fijos en posición y dirección, aplicándose después la carga lateral H al pórtico. Esta carga produce momentos de empotramiento de valor $Hh_1/12$, y el momento desequilibrado en B se redistribuye luego en el pórtico. Como hay que satisfacer dos ecuaciones de equilibrio independientes, hay que imponer dos movimientos independientes al pórtico y éstos pueden deducirse de los mismos dos mecanismos independientes, figuras 2.37 (b) y (c). En la figura 2.38 (b), los nudos del pórtico se han desplazado, *pero sin girar*, a las posiciones que ocupan en la figura 2.37 (b). Se ha tomado un desplazamiento arbitrario que produce momentos flectores en cabeza y pie de los pilares de valor $1000x_1$. Manteniendo los nudos en sus nuevas posiciones, se pueden redistribuir estos momentos hasta llegar al equilibrio.

Análogamente, la figura 2.38 (c) se corresponde con la figura 2.37 (c). Puede verse en esta última figura que el movimiento del nudo C perpendicular a la di-

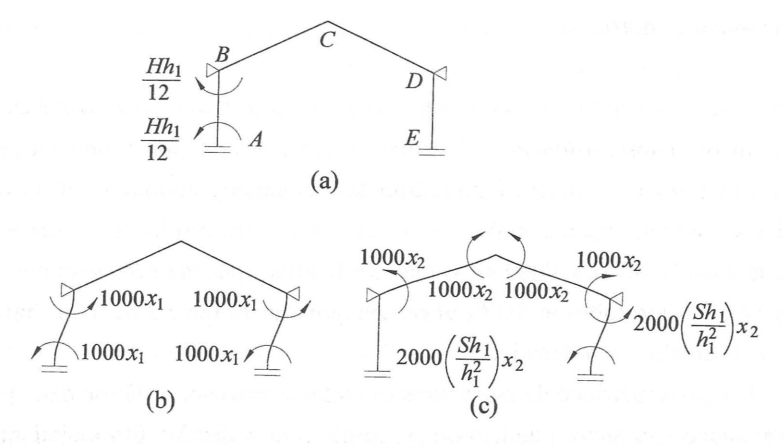


FIGURA 2.38

rección de BC es $s\theta$, de manera que se puede fijar arbitrariamente el momento en cada extremo de la viga BC en $1000x_2$, verificándose que

$$1000x^2 = \frac{6B(s\theta)}{s^2} \tag{2.109}$$

Compárese la ecuación (2.109) con la ecuación (2.103). El momento inducido en cada extremo del pilar DE vale

$$M_{DE} = \frac{6B(2h_2\theta)}{h_1^2} \tag{2.110}$$

y, suponiendo que las rigideces a flexión B de las ecuaciones (2.109) y (2.110) son las mismas (pórtico de sección constante), entonces

$$M_{DE} = \left(\frac{2000sh_2}{h_1^2}\right)x_2 \tag{2.111}$$

Ahora se pueden redistribuir los momentos de la figura 2.38 (c).

Finalmente, se superpondrán los momentos flectores de las tres distribuciones, y los momentos flectores resultantes en cada una de las secciones críticas se introducirán en la ecuación (2.108). Estas dos ecuaciones servirán para hallar los factores de escala x_1 y x_2, y obtener los momentos flectores definitivos.

Formulación matricial

En el presente capítulo se ha intentado presentar la teoría fundamental del comportamiento elástico de vigas y pórticos, ilustrando esta teoría con ejemplos que pueden realizarse a mano. Para estructuras grandes y complejas el trabajo del cálculo manual resulta excesivo y, a efectos prácticos, resulta conveniente disponer el análisis de forma que los cálculos repetitivos puedan ser realizados por ordenador. La formulación matricial proporciona un enfoque sistemático adecuado para el cálculo por ordenador.

El análisis matricial de estructuras es un tema extenso, y sólo se dará aquí una introducción; el lector puede dirigirse al libro de Livesley,* cuya notación se ha adoptado aquí (por comodidad). Se supone que el lector tiene un conocimiento elemental del álgebra matricial.

El problema puede plantearse de la siguiente forma. Sobre un pórtico elástico actúan una serie de cargas $\boldsymbol{p}_A, \boldsymbol{p}_B, \ldots$, en cuyos puntos de aplicación se producen unos desplazamientos $\boldsymbol{d}_A, \boldsymbol{d}_B, \ldots$ Si el vector $\boldsymbol{p}$ representa el conjunto completo de las cargas aplicadas y el vector $\boldsymbol{d}$ el conjunto de los desplazamientos correspondientes, se trata de encontrar la *matriz de rigidez* $\boldsymbol{K}$ de la estructura completa, donde

$$\boldsymbol{p} = \boldsymbol{K}\boldsymbol{d} \tag{2.112}$$

Hallada la matriz $\boldsymbol{K}$ las cargas $\boldsymbol{p}$ pueden obtenerse en función de los desplazamientos $\boldsymbol{d}$. O bien, invirtiendo la matriz $\boldsymbol{K}$, obtenemos

$$\boldsymbol{d} = \boldsymbol{K}^{-1}\boldsymbol{p} = \boldsymbol{F}\boldsymbol{p}, \tag{2.113}$$

donde $\boldsymbol{F}$ es la *matriz de flexibilidad* de la estructura; se puede ahora obtener los desplazamientos $\boldsymbol{d}$ para cualquier valor de las cargas $\boldsymbol{p}$.

Para explicar el empleo de los métodos matriciales, se describirá brevemente el método de equilibrio (o de la rigidez); este método conduce a un montaje sistemático de la matriz de rigidez $\boldsymbol{K}$ de la estructura. Es conveniente e instructivo

* R. K. Livesley, *Matrix Methods of Structural Analysis*. Oxford: Pergamon Press, 1964 [trad. castellana de J. Martínez Calzón, *Métodos matriciales para cálculo de estrucuturas*. Madrid: Blume, 1970].

presentar el análisis dividido en tres pasos, para mostrar cómo en cada uno de ellos se emplea una de las ecuaciones fundamentales; estos pasos son:

1. Escribir las relaciones fuerza-desplazamiento para cada elemento (esto supone usar la relación *tensión-deformación*).
2. Establecer la relación entre los desplazamientos de los elementos individuales y los desplazamientos (***d***) de los nudos de la estructura (esto es, *compatibilidad*).
3. Establecer el *equilibrio* para cada nudo de la estructura.

Paso 1. Relaciones fuerza-desplazamiento de cada elemento

En la figura 2.39 (compárese con la Fig. 2.13) se muestra la deformada de un elemento de sección constante; originariamente, el extremo 1 estaba en el origen de coordenadas y el elemento estaba dispuesto a lo largo del eje x. Sobre el extremo 1 actúa el esfuerzo $\boldsymbol{p}_1$ de componentes p_{x1}, p_{y1} y m_1. Los extremos 1 y 2 se han movido $\boldsymbol{d}_1$ y $\boldsymbol{d}_2$, donde por ejemplo, $\boldsymbol{d}_1$ es un vector desplazamiento de componentes δ_{x1}, δ_{y1} y θ_1.

Podemos ahora escribir varias relaciones entre las distintas cantidades que aparecen en la figura 239 empleando la ley elástica de tensión-deformación. Para que los resultados sean comparables con los de Livesley, se considerará la deformación axial además de la deformación por flexión, de manera que, para la tracción simple del elemento (y en la hipótesis habitual de *pequeñas* deformaciones),

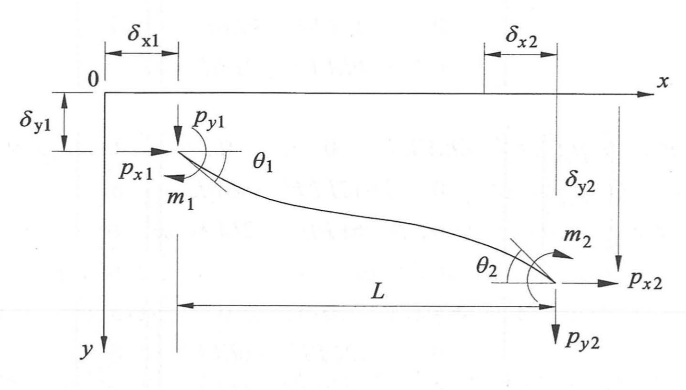


FIGURA 2.39

$$p_{x1} = -p_{x2} = (EA/L)(\delta_{x1} - \delta_{x2}). \quad (2.114)$$

Podemos aplicar las ecuaciones (2.39) directamente a la figura 2.39 para obtener inmediatamente

$$\left.\begin{aligned} m_1 &= (6EI/L^2)\delta_{y1} + (4EI/L)\theta_1 - (6EI/L^2)\delta_{y2} + (2EI/L)\theta_2 \\ m_2 &= (6EI/L^2)\delta_{y1} + (2EI/L)\theta_1 - (6EI/L^2)\delta_{y2} + (4EI/L)\theta_2 \end{aligned}\right\} \quad (2.115)$$

donde, de nuevo para coincidir con la notación de Livesley, la rigidez a flexión se ha expresado por EI en vez de B. Sumando las ecuaciones (2.115) se llega a

$$\begin{aligned} (m_1 + m_2)/L = p_{y1} &= -p_{y2} \\ &= (12EI/L^3)\delta_{y1} + (6EI/L^2)\theta_1 - (12EI/L^3)\delta_{y2} + (6EI/L^2)\theta_2 \end{aligned} \quad (2.116)$$

Se pueden expresar ahora en forma matricial las ecuaciones (2.114), (2.115) y (2.116).

$$\begin{bmatrix} p_{x1} \\ p_{y1} \\ m_1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} EA/L & 0 & 0 \\ 0 & 12EI/L^3 & 6EI/L^2 \\ 0 & 6EI/L^2 & 4EI/L \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \delta_{x1} \\ \delta_{y1} \\ \theta_1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -EA/L & 0 & 0 \\ 0 & -12EI/L^3 & 6EI/L^2 \\ 0 & 6EI/L^2 & 2EI/L \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \delta_{x2} \\ \delta_{y2} \\ \theta_2 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} p_{x2} \\ p_{y2} \\ m_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -EA/L & 0 & 0 \\ 0 & -12EI/L^3 & -6EI/L^2 \\ 0 & 6EI/L^2 & 2EI/L \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \delta_{x1} \\ \delta_{y1} \\ \theta_1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} EA/L & 0 & 0 \\ 0 & 12EI/L^3 & -6EI/L^2 \\ 0 & -6EI/L^2 & 4EI/L \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \delta_{x2} \\ \delta_{y2} \\ \theta_2 \end{bmatrix}$$

que pueden escribirse en notación abreviada

$$\left.\begin{aligned} \boldsymbol{p}_1 &= \boldsymbol{K}_{11}\, \boldsymbol{d}_1 + \boldsymbol{K}_{12}\, \boldsymbol{d}_2 \\ \boldsymbol{p}_2 &= \boldsymbol{K}_{21}\, \boldsymbol{d}_1 + \boldsymbol{K}_{22}\, \boldsymbol{d}_2 \end{aligned}\right\} \tag{2.117}$$

Como puede verse, $\boldsymbol{K}_{11}$ y $\boldsymbol{K}_{22}$ son simétricas y $\boldsymbol{K}_{12} = \boldsymbol{K}_{21}^T$. Esta simetría es característica del análisis elástico; por ejemplo, a partir de la simetría de la matriz de rigidez $\boldsymbol{K}$ de la estructura completa se puede deducir el teorema de la reciprocidad (y la teoría del análisis con modelos).

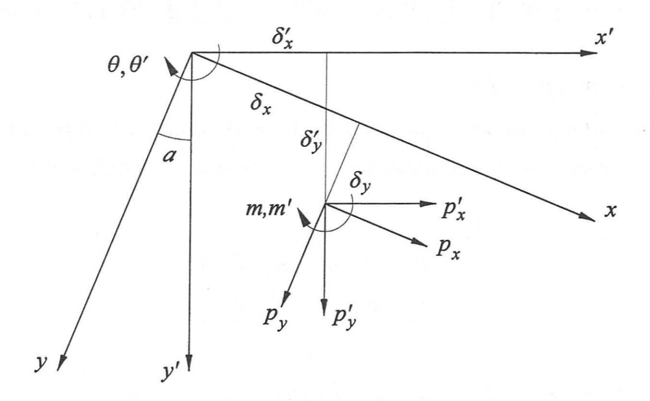


FIGURA 2.40

Toda la formulación conducente a la ecuación (2.117) se ha hecho según las *coordenadas del elemento*; en la figura 2.39 se había tomado, arbitrariamente, el eje x en la dirección original del elemento. Para montar la matriz de rigidez de la estructura completa, hay que elegir unos ejes de referencia fijos. Llamaremos a estos ejes *sistema de coordenadas* y los denotaremos por (x', y'), como aparece en la figura 2.40. Al sumar las componentes de las fuerzas en la dirección x' se llega a

$$p_x' = p_x \cos \alpha - p_y \operatorname{sen} \alpha \tag{2.118}$$

donde se ha supuesto que las coordenadas del elemento están giradas un ángulo α respecto al sistema de coordenadas fijo. Análogamente,

$$p'_y = p_x \text{ sen } \alpha + p_y \cos \alpha \qquad (2.119)$$

y

$$m' = m \qquad (2.120)$$

de manera que, finalmente

$$\begin{bmatrix} p'_x \\ p'_y \\ m' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos \alpha & -\text{sen } \alpha & 0 \\ \text{sen } \alpha & \cos \alpha & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} p_x \\ p_y \\ m \end{bmatrix}$$

o, más brevemente, $\boldsymbol{p}' = \boldsymbol{T}\boldsymbol{p}$.

Consideraciones similares en cuanto a los desplazamientos muestran que $\boldsymbol{d} = \boldsymbol{T}^t\boldsymbol{d}'$, de manera que las ecuaciones (2.117) pueden sustituirse por

$$\left.\begin{aligned} \boldsymbol{p}'_1 &= \boldsymbol{K}'_{11}\, \boldsymbol{d}'_1 + \boldsymbol{K}'_{12}\, \boldsymbol{d}'_2 \\ \boldsymbol{p}'_2 &= \boldsymbol{K}'_{21}\, \boldsymbol{d}'_1 + \boldsymbol{K}'_{22}\, \boldsymbol{d}'_2 \end{aligned}\right\} \qquad (2.121)$$

donde $\boldsymbol{K}_{ij}' = \boldsymbol{T}\, \boldsymbol{K}_{ij}\, \boldsymbol{T}^t$. Las ecuaciones (2.121) tienen ahora la forma que puede usarse directamente para montar la matriz de rigidez completa de la estructura.

Paso 2. Compatibilidad

Usaremos uno de los ejemplos de Livesley para aclarar la manera de formular relaciones de compatibilidad muy sencillas. El pórtico de la figura 2.41 tiene dos plantas y está empotrado en su base; en los cuatro nudos *A*, *B*, *C* y *D* se aplican las cargas exteriores y se busca el vector desplazamiento $\boldsymbol{d}$ para dichos nudos. Se ha identificado cada uno de los elementos del pórtico con una letra minúscula, y a cada elemento se le ha asignado una «dirección», la flecha que va desde el extremo 1 al extremo 2. Para el elemento *c*, por ejemplo, el extremo 1 está en el nudo *A* y el extremo 2 en el nudo *B*. Así, para este elemento en particular $\boldsymbol{d}'_{1C} = \boldsymbol{d}_A$, y $\boldsymbol{d}'_{2C} = \boldsymbol{d}_B$. Sólo se precisa hacer afirmaciones tan sencillas como ésta;

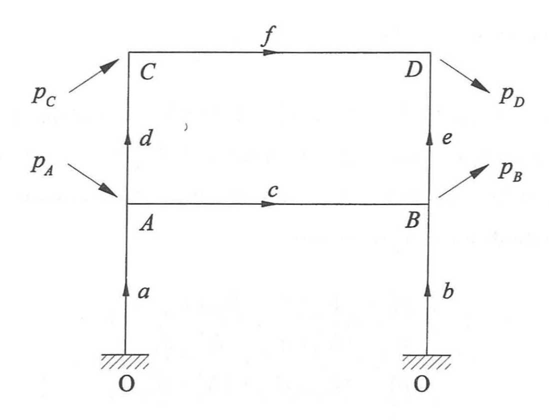


FIGURA 2.41

el conjunto completo de condiciones de compatibilidad puede escribirse en la forma:

$$\left.\begin{array}{lll}
\text{Elemento } a & \mathbf{d}'_{1a} = \mathbf{0} & \mathbf{d}'_{2a} = \mathbf{d}_A \\
\text{Elemento } b & \mathbf{d}'_{1b} = \mathbf{0} & \mathbf{d}'_{2b} = \mathbf{d}_B \\
\text{Elemento } c & \mathbf{d}'_{1c} = \mathbf{d}_A & \mathbf{d}'_{2c} = \mathbf{d}_B \\
\text{Elemento } d & \mathbf{d}'_{1d} = \mathbf{d}_A & \mathbf{d}'_{2d} = \mathbf{d}_C \\
\text{Elemento } e & \mathbf{d}'_{1e} = \mathbf{d}_B & \mathbf{d}'_{2e} = \mathbf{d}_D \\
\text{Elemento } f & \mathbf{d}'_{1f} = \mathbf{d}_C & \mathbf{d}'_{2f} = \mathbf{d}_D
\end{array}\right\} \quad (2.122)$$

Paso 3. Equilibrio

Las ecuaciones de equilibrio para cada nudo del pórtico pueden escribirse también con facilidad. En el ejemplo de la figura 2.41, sobre el nudo A actúa una fuerza exterior $\mathbf{p}_A$, y ésta tiene que ser igual a la suma de los esfuerzos de extremo que actúan sobre los tres elementos que concurren en el nudo. Así,

$$\mathbf{p}_A = \mathbf{p}'_{2a} + \mathbf{p}'_{1c} + \mathbf{p}'_{1d} \quad (2.123)$$

y otras tres ecuaciones similares pueden escribirse para los nudos B, C y D.

Montaje de la matriz completa

Las ecuaciones (2.121), (2.122) y (2.123) pueden ser utilizadas para montar la matriz de rigidez completa de todo el pórtico de la figura 2.41. Por ejemplo, en el nudo A, al aplicar la ecuación (2.121) al extremo 2 del elemento a y a los extremos 1 de los elementos c y d, se obtiene

$$\left.\begin{aligned} \mathbf{p}'_{2a} &= (\mathbf{K}'_{21})_a\mathbf{0} + (\mathbf{K}'_{22})_a\mathbf{d}'_{2a} \\ \mathbf{p}'_{1c} &= (\mathbf{K}'_{11})_c\mathbf{d}'_{1c} + (\mathbf{K}'_{12})_c\mathbf{d}'_{2c} \\ \mathbf{p}'_{1d} &= (\mathbf{K}'_{11})_d\mathbf{d}'_{1d} + (\mathbf{K}'_{12})_d\mathbf{d}'_{2d} \end{aligned}\right\} \tag{2.124}$$

y aplicando la ecuación (2.122) esto puede escribirse en la forma

$$\left.\begin{aligned} \mathbf{p}'_{2a} &= (\mathbf{K}'_{22})_a\mathbf{d}_A \\ \mathbf{p}'_{1c} &= (\mathbf{K}'_{11})_c\mathbf{d}_A + (\mathbf{K}'_{12})_c\mathbf{d}_B \\ \mathbf{p}'_{1d} &= (\mathbf{K}'_{11})_d\mathbf{d}_A \qquad\qquad\quad + (\mathbf{K}'_{12})_d\mathbf{d}_C \end{aligned}\right\} \tag{2.125}$$

Finalmente, la ecuación de equilibrio (2.123) da

$$\mathbf{p}_A = [(\mathbf{K}'_{22})_a + (\mathbf{K}'_{11})_c + (\mathbf{K}'_{11})_d]\mathbf{d}_A + (\mathbf{K}'_{12})_c\mathbf{d}_B + (\mathbf{K}'_{12})_d\mathbf{d}_C \tag{2.126}$$

En los nudos B, C y D se llega a ecuaciones análogas, que conducen a la ecuación matricial completa

$$\begin{bmatrix} \mathbf{p}_A \\ \mathbf{p}_B \\ \mathbf{p}_C \\ \mathbf{p}_D \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} (\mathbf{K}'_{22})_a + (\mathbf{K}'_{11})_c + (\mathbf{K}'_{11})_d & (\mathbf{K}'_{12})_c & (\mathbf{K}'_{12})_d & \mathbf{0} \\ (\mathbf{K}'_{21})_c & (\mathbf{K}'_{22})_b + (\mathbf{K}'_{22})_c + (\mathbf{K}'_{11})_e & \mathbf{0} & (\mathbf{K}'_{12})_e \\ (\mathbf{K}'_{21})_d & \mathbf{0} & (\mathbf{K}'_{22})_d + (\mathbf{K}'_{11})_f & (\mathbf{K}'_{12})_f \\ \mathbf{0} & (\mathbf{K}'_{21})_e & (\mathbf{K}'_{21})_f & \mathbf{K}'_{22})_e + (\mathbf{K}'_{22})_f \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{d}_A \\ \mathbf{d}_B \\ \mathbf{d}_C \\ \mathbf{d}_D \end{bmatrix} \tag{2.127}$$

Deben resaltarse algunas características de la matriz de rigidez. En primer lugar, como ya se ha dicho, es simétrica. En segundo lugar, los términos de la diagonal principal representan todos rigideces directas, esto es, la carga que en un nudo determinado produciría un desplazamiento unidad en dicho nudo, y son de la forma $\boldsymbol{K}'_{11}$ o $\boldsymbol{K}'_{22}$. Por el contrario, el resto de los términos representan conexiones entre los nudos, y son de la forma $\boldsymbol{K}'_{12}$ o $\boldsymbol{K}'_{21}$ (o cero, si no hay conexión).

Teniendo en cuenta estas características, la ecuación matricial (2.127) puede ser escrita de forma inmediata haciendo referencia simplemente a la notación de la figura 2.41. Por ejemplo, en el nudo *C* sólo concurren dos elementos, el *d* (extremo 2) y el *f* (extremo 1). Por tanto, el término de la diagonal de la matriz tiene que ser $(\boldsymbol{K}'_{22})_d + (\boldsymbol{K}'_{11})_f$. Análogamente, el elemento d conecta el nudo *C* con el nudo *A*, y el término multiplicador correspondiente de $\boldsymbol{d}_A$ tiene que ser, por tanto, $(\boldsymbol{K}'_{21})_d$; no hay conexión con el nudo *B*, y el término correspondiente es cero; el elemento *f* va de *C* a *D*, y el término es, entonces $(\boldsymbol{K}'_{12})_f$. Toda esta información aparece en la tercera fila de la matriz de rigidez de la ecuación (2.127).

Es evidente que no se precisa mucha información para que un ordenador calcule un pórtico dado. Es preciso definir los elementos; es decir, hay que dar sus longitudes, áreas, momentos de inercia, módulos de elasticidad e inclinaciones; también hay que especificar qué elementos concurren en cada nudo. Finalmente, habrá que especificar las cargas en los nudos. No se necesita nada más para un ordenador adecuadamente programado; la matriz de rigidez (2.127) puede montarse automáticamente y su matriz inversa nos dará información inmediata sobre las deformaciones de la estructura bajo cualquier sistema de cargas.

Existen otros métodos de análisis por ordenador de estructuras linealmente elásticas, pero la mayor parte del interés en análisis numéricos de este tipo radica en las técnicas de programación más que en la teoría fundamental de estructuras. El método que se acaba de describir muestra la sencillez formal de los métodos matriciales (aunque los cálculos pueden resultar largos y tediosos, incluso para un ordenador). Además, resulta evidente que, una vez definido el algoritmo de cálculo básico, resulta fácil introducir modificaciones individuales. Por citar un solo ejemplo, el efecto de la carga axial de compresión es el de reducir la rigidez

a flexión de un elemento; estas reducciones pueden tenerse en cuenta en los valores de K'_{ij} que se introducen en la matriz final.

Efectos térmicos

En este capítulo se han supuesto estructuras ideales para intentar presentar con claridad las técnicas básicas del análisis elástico de estructuras. Los efectos de falta de encaje inicial, apoyos flexibles, etc., pueden introducirse en las ecuaciones sin dificultad; las ecuaciones se complican, pero los principios básicos permanecen invariables. Quizá la mejor manera de ilustrar este tipo de complicaciones sea discutir el efecto de las dilataciones térmicas de un pórtico respecto a sus apoyos.

Al aplicar directamente la ecuación del trabajo virtual para una estructura porticada se empleó la ecuación (2.56). El término M/B representa las curvaturas reales de los elementos del pórtico, mientras que el término $\alpha_r\, m_r$ representa una distribución de momentos flectores en equilibrio con cargas exteriores nulas. Ahora bien, al deducir la ecuación (1.17), de la que se obtuvo la ecuación (2.56), se supuso que todas las deformaciones se debían a la flexión, ignorando cualquier otro factor. Así, se consideraron nulas las deformaciones por cortante, y se consideró asimismo las cargas axiales en los elementos no cambiaban su longitud. Si se tienen en cuenta las deformaciones axiales, es preciso expandir la ecuación (2.56) en la forma:

$$\oint (\alpha_r m_r)\left(\frac{M}{B}\right) dx + \oint (-t)(\varepsilon)\, dx = 0 \qquad (2.128)$$

En la ecuación (2.128) se supone que el estado final deformado de la estructura implica curvaturas M/B y, además, *deformaciones* axiales de tracción ε, en todos los elementos. Los *esfuerzos normales* en los elementos puede ser tan pequeños como para que las deformaciones debidas a ellos puedan ser ignoradas, en cuyo caso las deformaciones ε representarían posibles dilataciones térmicas. El término $(-t)$ en la ecuación (2.128) representa el esfuerzo normal en un elemento asociado con los momentos residuales $\alpha_r m_r$.

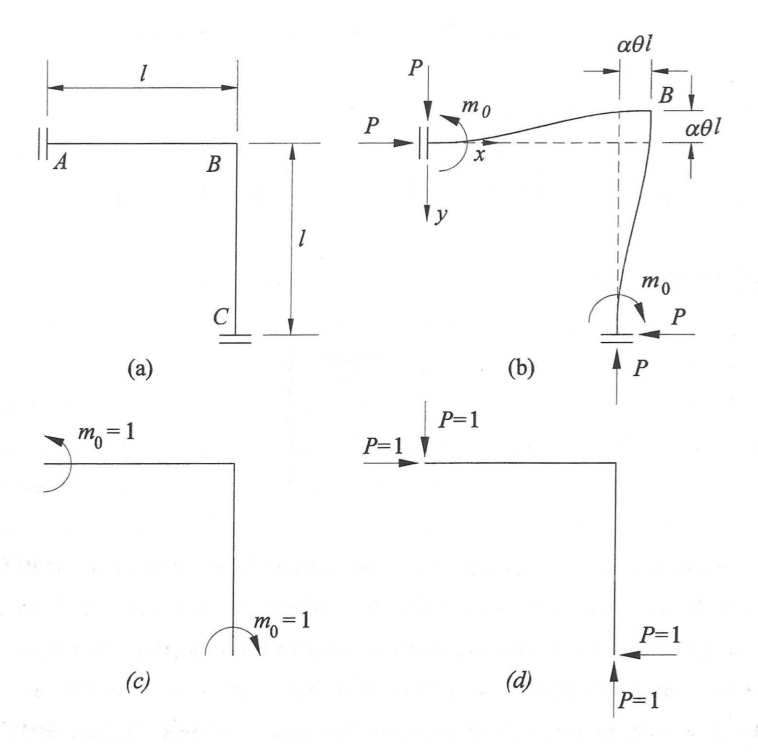


FIGURA 2.42

Ejemplo 2.9. Considérese el pórtico en ángulo recto de sección constante de la figura 2.42 (a), empotrado rígidamente en A y C. Si en el pórtico se produce un incremento de temperatura θ, y el coeficiente de dilatación térmica de los elementos es α, entonces el nudo B se desplazará, por simetría, a la posición de la figura 2.34 (b). Dado que el pórtico es simétrico, hay dos cantidades redundantes, m_0 y P, en el correspondiente estado flexionado del pórtico. En este sencillo ejemplo, el problema puede resolverse directamente por integración; para el elemento AB, el momento flector en cualquier sección vale $(m_0 + Px)$, de manera que

$$B\frac{d^2y}{dx^2} = m_0 + Px \tag{2.129}$$

Integrando esta ecuación y aplicando las condiciones de contorno

$$\left.\begin{matrix} x=0 \\ y=0 \end{matrix}\right\} \left.\begin{matrix} x=0 \\ \dfrac{dy}{dx}=0 \end{matrix}\right\} \left.\begin{matrix} x=l \\ y=-\alpha\theta l \end{matrix}\right\} \left.\begin{matrix} x=l \\ \dfrac{dy}{dx}=0 \end{matrix}\right\} \qquad (2.130)$$

puede demostrarse que

$$\left.\begin{matrix} P=\dfrac{12\alpha\theta B}{l^2} \\ m_0=-\dfrac{Pl}{2} \end{matrix}\right\} \qquad (2.131)$$

Esta solución directa resulta fácil sólo porque la geometría de la deformación es sencilla; pórticos más complicados obligarían a utilizar el trabajo virtual (o la energía de deformación en una estructura elástica) para obtener las ecuaciones de compatibilidad. Si se utiliza el trabajo virtual para el mismo problema, las dos distribuciones de momentos flectores residuales se muestran en las figuras 2.42 (c) y (d), se pueden hacer las siguientes afirmaciones para el elemento *AB*

A. Las curvaturas reales $(m_0 + Px)/B$ y las deformaciones axiles $\alpha\theta$ son compatibles.
B. (Fig. 2.42 (c)). Los momentos flectores $m_0 = 1$ y los esfuerzos normales nulos están en equilibrio con cargas exteriores cero.
C. (Fig. 2.42 (d)). Los momentos flectores $1 \cdot x$ y los esfuerzos normales $P = 1$ están en equilibrio con cargas exteriores cero.

(2.132)

Las afirmaciones *A* y *B*, aplicadas a la ecuación (2.128), dan

$$\int_0^l \frac{1}{B}(m_0 + Px)(1)\, dx = 0 \qquad (2.133)$$

y las afirmaciones *A* y *C* dan

$$\int_{0} \frac{1}{B}(m_0 + Px)(x)\, dx + \int_{0} (-1)(\alpha\theta)\, dx = 0 \qquad (2.134)$$

La resolución de las ecuaciones (2.133) y (2.134) nos da la respuesta correcta, ecuación (2.131).

3
Vigas y pórticos plásticos

Considérese un pórtico dado sometido a carga *proporcional*, esto es, todas las cargas se especifican en función de una de ellas, por ejemplo W. A medida que la carga del pórtico crece lentamente a partir de cero, la gráfica carga-deformación tendrá la forma de la figura 3.1. Entre O y A el comportamiento es elástico, con las deformaciones proporcionales a las cargas; puede aplicarse el principio de superposición y todo el capítulo anterior se ocupa del análisis de pórticos en este periodo elástico. En A se alcanza la *carga de cedencia* W_y, y parte de la estructura pasa del periodo elástico al plástico. En general, el pórtico puede continuar soportando la carga pero las deformaciones crecen más rápidamente. Si la relación momento-curvatura del material del pórtico es la que aparece en la figura 1.19 (a) llegará un momento en que la carga alcance un máximo W_c para el cual se producen grandes deformaciones *sin disminución en la magnitud de la carga* W_c. Esta carga W_c recibe el nombre de *carga de colapso*, y el análisis plástico simple se ocupa de hallar las cargas de colapso de pórticos.

En el proceso de cálculo se emplean factores que multiplican la magnitud de las cargas en servicio y que aseguran que el pórtico será viable en servicio. En el cálculo elástico, normalmente se emplea un *coeficiente de seguridad* que asegura que la tensión de cedencia no se alcanza en ninguna sección del pórtico. La carga de servicio será, por tanto, una cierta fracción de la carga de cedencia W_y en la fi-

gura 3.1. En el cálculo plástico se emplea un *factor de carga* para asegurar que la condición de colapso no se alcance. Ahora la carga de servicio será una fracción de la carga de colapso W_c. Mediante una elección adecuada de los valores del factor de carga y del coeficiente de seguridad, puede conseguirse que los métodos elástico y plástico conduzcan al mismo dimensionado para un pórtico dado que soporta unas ciertas cargas en servicio.

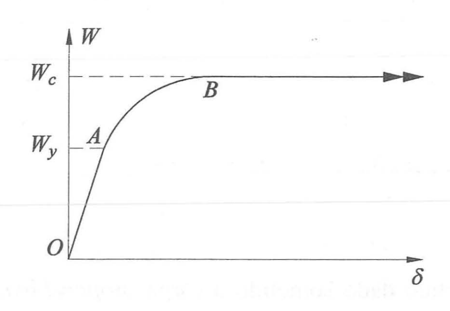


FIGURA 3.1

Sin embargo, los mismos valores de los coeficientes aplicados a otro pórtico diferente conducirían a dimensionados diferentes, ya que la relación W_c/W_y no es constante, sino que varía de un pórtico a otro. Así, el requisito elástico de que no se alcance el límite elástico conducirá a proyectos de pórticos que presentan distintos coeficientes de carga en relación con el colapso. Por consiguiente, si el único criterio de cálculo es el de *resistencia* el enfoque elástico resulta en cierta manera ilógico.

Por otro lado, como se verá, el método plástico de análisis es mucho más sencillo que el método elástico. En efecto, las condiciones de compatibilidad que complican el análisis elástico sólo están presentes en la condición de que el pórtico tiene que formar un mecanismo en el colapso y se ha podido apreciar ya que los mecanismos son particularmente fáciles de manejar en la teoría de pórticos. Por tanto, si el calculista está convencido de que un determinado pórtico debe ser proyectado según un criterio de resistencia, los métodos plásticos son al tiempo más lógicos y fáciles que los métodos elásticos. Si otros criterios, como la deformación o la estabilidad, intervienen en el cálculo de una estructura en

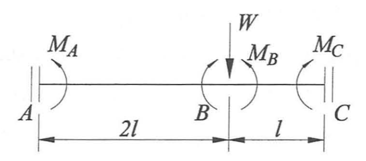


FIGURA 3.2

concreto, entonces el empleo de la teoría plástica debe ser considerado cuidadosamente.

Para entender cómo se alcanza el colapso plástico de una estructura, se analizará la viga de la figura 3.2. La gráfica completa de carga-deformación, a medida que la carga W crece lentamente desde cero hasta su valor de colapso, se muestra en la figura 3.3. El desarrollo de este ejemplo se da al final de este capítulo; por sencillez se ha utilizado la relación momento curvatura elástica/perfectamente plástica de la figura 1.19 (b). Nótese que un cálculo completo de este tipo es innecesario para determinar las cargas de colapso: sólo se ha hecho para mostrar la forma en que el colapso se produce.

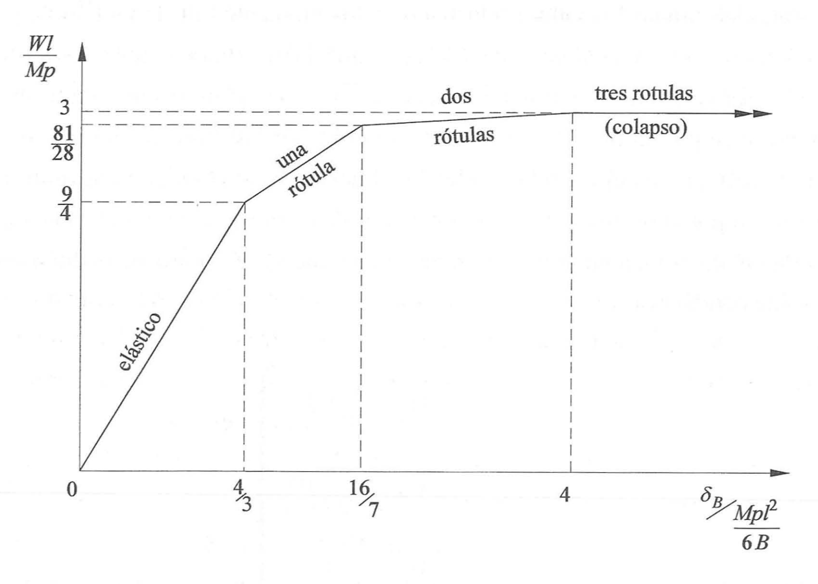


FIGURA 3.3

En primer lugar consideremos el mecanismo de barras rectas de la figura 3.4; tomando los momentos de la figura 3.2, la ecuación del trabajo virtual conduce a

$$2Wl = M_A - 3M_B + 2M_C \tag{3.1}$$

Esta ecuación de equilibrio debe satisfacerse siempre y, como la viga tiene dos redundancias, se trata de la única ecuación que relaciona los valores de M_A, M_B y M_C que puede deducirse de consideraciones de equilibrio.

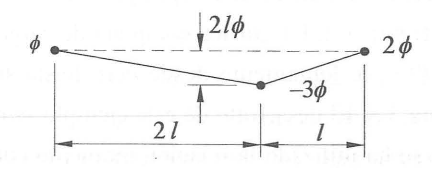


FIGURA 3.4

Para determinar los valores elásticos de los momentos flectores habría, pues, que escribir dos ecuaciones más (de compatibilidad). Para la solución elástica puede usarse de nuevo el trabajo virtual; también puede usarse algún otro método, por ejemplo, la integración directa, para obtener las dos ecuaciones precisas. Cualquiera que sea el método empleado, el hecho de que la viga tiene ambos extremos empotrados nos dará dos condiciones de contorno para la deformación; la pendiente de la viga en ambos extremos tiene que ser cero. Puede deducirse que la solución elástica es

$$\left.\begin{aligned} M_A &= \frac{6}{27}Wl \\ M_B &= -\frac{8}{27}Wl \\ M_C &= \frac{12}{27}Wl \end{aligned}\right\} \tag{3.2}$$

y la flecha correspondiente producida por la carga es

$$\delta_B = \frac{8}{81}\frac{Wl^3}{B} \tag{3.3}$$

Si el momento plástico último de la viga es M_p, es evidente que la zona plastificada se producirá primero en el extremo *C*, ya que el momento elástico es mayor en esta sección. El anterior análisis será, por tanto, válido si se cumple

$$W < \frac{9}{4}\frac{M_p}{l} \tag{3.4}$$

Si el valor de *W* crece por encima de 9 $M_p/4l$, el momento en el extremo *C* permanecerá constante manteniendo un valor igual al momento plástico último M_p; la rótula plástica en *C* sufrirá un giro, y hay que realizar un nuevo análisis para la viga modificada dibujada en la figura 3.5 (a).

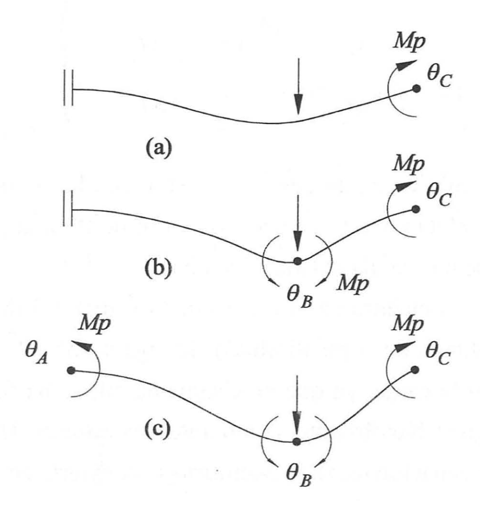


FIGURA 3.5

Es de gran importancia apreciar la diferencia entre la viga en el estado de la figura 3.5 (a) y en su estado original, figura 3.2. Como se ha producido una rótu-

la plástica, una de las condiciones de compatibilidad ha desaparecido; la pendiente de la viga en el extremo C ya no es horizontal. Ya no se puede aplicar esta condición para hallar la solución. Sin embargo, el grado de redundancia de la viga se ha reducido en uno, ya que el valor del momento flector M_C es conocido. Para un nuevo incremento de la carga, la ecuación (3.1) se sustituye por

$$2Wl = M_A - 3M_B + 2M_p \qquad (3.5)$$

Para calcular los momentos M_A y M_B, sólo se precisa, por tanto, una única ecuación, y ésta puede obtenerse por la condición de contorno en A: la pendiente en A es todavía cero.

Así, la aparición de una rótula plástica ha simplificado el problema; escribiendo esta nueva ecuación y resolviendo el sistema formado con la ecuación (3.5), se llega a

$$\left.\begin{aligned} M_A &= \frac{12}{27}Wl - \frac{1}{2}M_p \\ M_B &= -\frac{14}{27}Wl + \frac{1}{2}M_p \\ M_C &= M_p \end{aligned}\right\} \qquad (3.6)$$

Las ecuaciones (3.6), como puede verse, son válidas para $W > 9\ M_p/4l$ y $W < 81\ M_p/28l$. En efecto, para este segundo valor de la carga, M_B alcanza el valor $-M_p$, al formarse una rótula plástica negativa.

Ahora la viga se encuentra en el estado de la figura 3.5 (b). De nuevo se ha destruido una condición de compatibilidad; la viga ya no es continua en la sección B situada bajo la carga, ya que precisamente allí se ha formado una rótula plástica capaz de girar. No obstante, como antes, el valor de M_B es ahora conocido ($M_B = -M_p$) y la ecuación (3.5) de equilibrio se convierte en

$$M_A = 2Wl - 5M_p \qquad (3.7)$$

Para cualquier valor de la carga W (por encima de 81 $M_p/28l$), la ecuación (3.7) nos da ahora inmediatamente el valor de M_A, siendo M_B y M_C conocidos y de va-

lor $-M_p$ y $+ M_p$, respectivamente. Así, la viga se ha vuelto isostática, y no es preciso escribir más ecuaciones para hallar los momentos flectores.

A partir de la ecuación (3.7), puede verse que el valor de W puede crecer hasta alcanzar

$$W_c = \frac{3M_p}{l} \tag{3.8}$$

para este valor de W, M_A es igual a M_p. La viga ha alcanzado su *estado de colapso*, que se muestra en la figura 3.5 (c). Este estado de colapso se caracteriza por la formación de una rótula en una viga isostática, que la convierte en un *mecanismo*. En el proceso que lleva al colapso, las condiciones de compatibilidad elástica se han destruido, y no son necesarias para calcular la carga de colapso. Lo único que se necesita para calcular la carga de colapso es conocer el mecanismo de colapso; la distribución de momentos en equilibrio de la figura 3.5 (c), junto al mecanismo virtual de la figura 3.4, conduce inmediatamente a la ecuación $W_C l = 3M_p$. Es más, a los efectos de calcular W_C, no es necesario dibujar el mecanismo de la figura 3.5 (c) con los elementos flexionados elásticamente. El mecanismo virtual de la figura 3.4, con los elementos rectos, puede considerarse como el mecanismo de colapso.

Nótese, además, que el valor de colapso W_C puede calcularse directamente a partir de la ecuación general de equilibrio, ecuación (3.1). En esta ecuación, una elección arbitraria de los momentos M_A, M_B y M_C, llevará a un cierto valor de la carga W. Si se hace que W alcance un valor tan grande como sea posible, variando los valores de los momentos flectores, se verá que $M_A = M_C = -M_B = M_p$, que conduce de nuevo a $W_C l = 3M_p$. Por tanto, la formación del mecanismo de colapso de la viga está relacionado con la *ruptura* de la correspondiente ecuación de equilibrio, y las ecuaciones (3.5) y (3.7) son pasos en este proceso de ruptura. Por supuesto, una ecuación de equilibrio siempre puede identificarse con un mecanismo. Para este problema en concreto, tan sencillo, en el que sólo hay una ecuación de equilibrio, sólo hay un posible mecanismo de colapso. En problemas más complejos, hay gran número de posibles mecanismos y el objetivo fundamental del análisis plástico simple es encontrar el mecanismo correcto.

Como se ha visto, la viga de la figura 3.5 (b) es isostática; la aparición de la última rótula permitió la formación de un mecanismo y el subsiguiente cálculo de la carga de colapso. En la figura 3.6 se muestra el diagrama de momentos flectores correspondiente a la figura 3.5 (c), en su forma usual de momentos libres y reactantes; la línea reactante está situada de forma que se pueda alcanzar el momento plástico en las secciones *A*, *B* y *C*. El valor de colapso W_C se podría haber deducido directamente de la figura 3.6. Obsérvese que aunque en las rótulas se alcanza el valor del momento plástico último, este valor de M_p no se supera en ninguna otra sección de la viga.

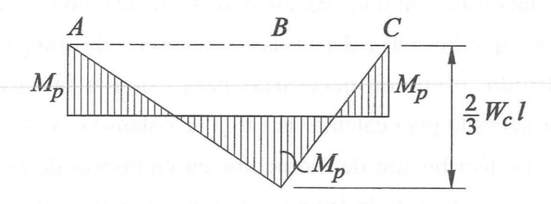


FIGURA 3.6

El comportamiento de esta viga simple ilustra la forma general del colapso plástico. No todos los pórticos se comportan de esta manera tan sencilla; en el ejemplo anterior, una vez que se había formado una rótula, ésta seguía girando hasta que la formación de la última rótula producía el colapso. En pórticos más complejos, puede ocurrir que se forme una rótula en las primeras etapas de carga y que esta rótula deje de girar al aumentar las cargas, y que el mecanismo de colapso final no contenga las rótulas que se formaron al principio. No obstante, *hay* un mecanismo final, y la historia de carga no afecta a la capacidad portante final del pórtico.

Es más, la historia previa del pórtico, aunque incluya deformaciones permanentes, no afecta a la carga de colapso. Por ejemplo, la viga biempotrada del ejemplo anterior podría haber tenido unos ciertos momentos de auto-solicitación. No obstante, los momentos *totales* en las tres secciones críticas seguirán estando relacionados por la ecuación de equilibrio (3.1), y como los momentos totales tienen valores máximos $\pm M_p$, el valor calculado de $W_C l = 3M_p$, seguiría siendo el

mismo. Análogamente, cualquier pequeño cedimiento de los apoyos no afectará a la ecuación (3.1) o al mecanismo de colapso final.

Además, cualquier imperfección en la rigidez del pórtico tampoco invalidará el cálculo plástico. Si los extremos *A* y *C* de la viga no hubieran estado perfectamente empotrados, la solución elástica hubiera sido diferente. Sin embargo, si son suficientemente resistentes como para soportar el momento plástico último, el mecanismo final de colapso y la carga W_C correspondiente permanecerán invariables, aunque el *orden* de formación de las rótulas haya sido distinto.

A partir de este sencillo ejemplo, pueden escribirse las tres ecuaciones básicas de la teoría de estructuras en la forma más adecuada para el análisis plástico. En el momento del colapso, un pórtico tiene que satisfacer las tres condiciones de

$$\left.\begin{array}{l}\text{Equilibrio}\\ \text{Mecanismo}\\ \text{Cedencia}\end{array}\right\}$$

La condición de equilibrio establece que los momentos flectores en el pórtico tienen que estar en equilibrio con las cargas aplicadas. La forma de la ecuación de equilibrio empleada en el análisis plástico es idéntica a la usada en el análisis elástico.

La condición de mecanismo establece que, en el colapso, deben formarse rótulas en suficiente número como para transformar el pórtico, o parte de él, en un mecanismo. En el Capítulo 1 se han discutido ya los mecanismos *regulares* y *parciales*; los mecanismos parciales, que suponen un colapso incompleto, son importantes en el análisis plástico, como se verá más adelante. La condición de mecanismo se deduce del requisito general de compatibilidad de deformación.

La condición de límite puede considerarse como una afirmación verbal de la ley de deformación plástica del material. En el colapso, los momentos flectores en el pórtico no pueden superar el valor local del momento plástico último.

Puede demostrarse que estas tres condiciones son necesarias y suficientes para la obtención del factor de carga de colapso de un pórtico. En lo que sigue, se supondrá que se especifican las cargas de servicio y que la entrada en carga es proporcional. Así, el problema del análisis plástico es la obtención del factor de

carga de colapso λ_C por el que hay que multiplicar a *todas* las cargas para producir el colapso del pórtico. A continuación se enunciarán tres teoremas en los que se basan potentes métodos de análisis plástico; en el presente libro, no se dará su demostración.

Teoremas del colapso plástico

TEOREMA I. *El factor de carga de colapso es único.* Si es posible encontrar una distribución de momentos flectores que satisfaga las tres condiciones de equilibrio, mecanismo y cedencia, entonces, el correspondiente factor de carga λ_C es el verdadero factor de carga en el colapso.

TEOREMA II. *El límite superior.* Si es posible encontrar una distribución de momentos flectores correspondiente a un posible mecanismo de colapso, esto es, que satisface las condiciones de equilibrio y mecanismo, pero no necesariamente la de cedencia, entonces, el correspondiente factor de carga es mayor que, o, en el mejor de los casos igual a, el verdadero factor de carga en el colapso.

Se puede considerar este teorema como un «teorema de la inseguridad»; el factor de carga calculado a partir de un mecanismo elegido arbitrariamente nos hará suponer que un pórtico puede soportar *más* carga de la que es realmente posible.

TEOREMA III. *El límite inferior.* Si es posible encontrar una distribución de momentos que en ninguna sección viole la condición de cedencia, esto es, si se satisfacen las condiciones de equilibrio y cedencia, pero no necesariamente la de mecanismo, entonces, el correspondiente factor de carga es menor que, o en el mejor de los casos igual a, el verdadero factor de carga en el colapso.

Se puede considerar este teorema como el «teorema de la seguridad»; el factor de carga calculado a partir de una distribución de momentos flectores arbitrariamente elegida, que satisface las condiciones de equilibrio y cedencia, nos hará suponer que el pórtico puede soportar *menos* carga de la que es realmente posible.

Dos sencillos ejemplos servirán para ilustrar el empleo de estos teoremas.

Ejemplo 3.1. La viga empotrada-apoyada de la figura 3.7 (a) es de sección constante, cuyo momento plástico último es M_p. Se pide encontrar el factor de carga λ_c por el que habría que multiplicar la carga uniforme repartida w_0 por unidad de longitud, para que se produjera justo el colapso. La viga tiene una redun-

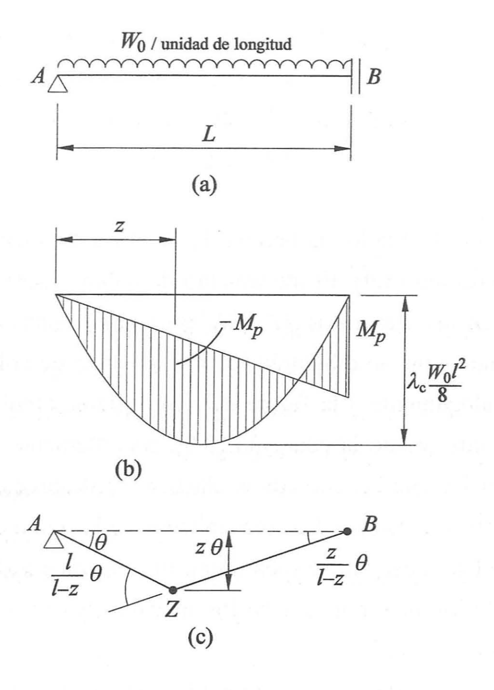


FIGURA 3.7

dancia; por tanto, para un mecanismo de colapso normal, se tienen que formar dos rótulas plásticas. Se puede dibujar rápidamente, por consiguiente, el diagrama de momentos flectores en el colapso como en la figura 3.7 (b), donde hay una rótula plástica positiva y otra negativa. El primer problema es localizar la sección Z en la que se forma la rótula positiva. Es posible, por supuesto, escribir la ecuación de los diagramas de momentos libres y reactantes, y deducir, para localizar el punto Z, la posición del momento positivo máximo.

Sin embargo, el problema puede resolverse de forma más sencilla empleando el teorema del límite superior. Considérese el mecanismo de barras rectas de la figura 3.7 (c), en el que se forma una rótula de positivos en Z, a una distancia z del apoyo A. Empleando este mecanismo virtual con la distribución de equilibrio de la figura 3.7 (b), y sabiendo que la carga repartida desciende una distancia media $\frac{1}{2} z\theta$,

$$(\lambda w_0 l)(\tfrac{1}{2} z\theta) = (-M_p)\left(-\frac{l}{l-z}\,\theta\right) + (M_p)\left(\frac{z}{l-z}\,\theta\right) \tag{3.9}$$

esto es,

$$\lambda = \frac{2M_p}{w_0 l} \frac{(l+z)}{(z)(l-z)} \tag{3.10}$$

Antes de seguir con el cálculo, es preciso hacer notar dos características en la obtención de la ecuación (3.9). El mecanismo de colapso será como el de la figura 3.7 (c), si bien los elementos AZ y BZ presentarán unas ciertas curvaturas elásticas. En lo que sigue, se dibujarán los mecanismos de colapso con los elementos rectos, análogamente a la figura 3.7 (c), y llamaremos a las ecuaciones de trabajo virtual tales como la ecuación (3.9), sencillamente, ecuación del trabajo. Esto no significa que las curvaturas elásticas se desprecien; las ecuaciones del tipo de la (3.10) son exactas. Los mecanismos de barras rectas como el de la figura 3.7 (c) pueden considerarse bien como mecanismos virtuales, bien como una descripción de los movimientos de los mecanismos reales en el estado de colapso.

Nótese que los signos de los momentos plásticos últimos en la figura 3.7 (b) se corresponden con los signos de los giros en las rótulas en la figura 3.7 (c). Así, al escribir la ecuación del trabajo para el colapso plástico, el producto del momento plástico último por su correspondiente giro de rótula es siempre positivo. Por tanto, para problemas sencillos, los signos de los giros en las rótulas carecen de importancia; para cualquier pequeño movimiento del pórtico en su configuración de colapso, el trabajo realizado por las cargas exteriores es igual al trabajo disipado en las rótulas, y el trabajo plástico es siempre positivo.

Volviendo a la ecuación (3.10), el valor de λ correspondiente a *cualquier* valor de z es, en virtud del teorema de la inseguridad, un límite superior del valor λ_c en el colapso. De todas las posibles localizaciones de la rótula de positivos, la correcta será aquella que dé un valor mínimo de λ. Para obtener el valor mínimo de λ habrá, por tanto, que derivar la ecuación (3.10) con respecto a z; la condición que debe satisfacerse es

$$z(l-z) = (l-2z)(l+z) \tag{3.11}$$

esto es,

$$z = (\sqrt{2} - 1)l \tag{3.12}$$

de donde

$$\lambda_c = 2(3 + 2\sqrt{2})\frac{M_p}{w_0 l^2} \tag{3.13}$$

Se puede escribir esta última ecuación en la forma

$$M_p = (0,686)\frac{\lambda_c w_0 l^2}{8} \tag{3.14}$$

El valor de M_p en la figura 3.7 (b) es (0,686) veces la altura del diagrama de momentos libres.

Ejemplo 3.2. Se trata de encontrar el factor de carga de colapso de una viga continua de cuatro vanos, de sección constante, que soporta una carga uniformemente repartida w_0, figura 3.8 (a).

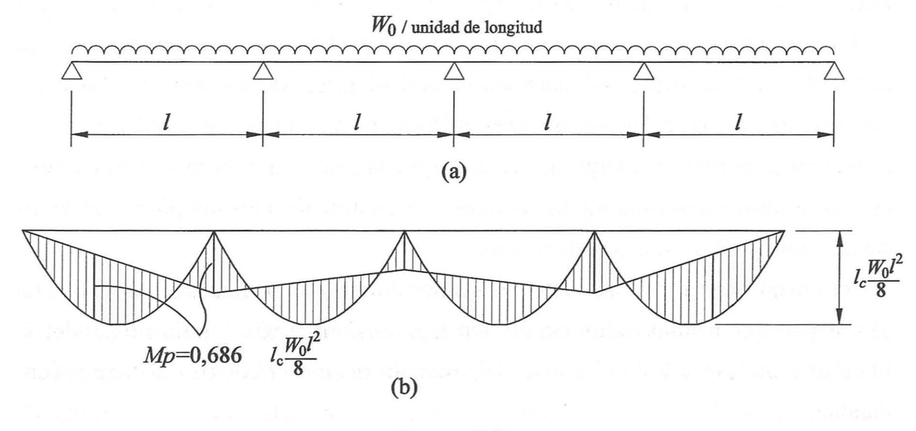


FIGURA 3.8

Una simple inspección hace suponer que los vanos extremos son más «débiles» que los interiores; se supondrá, por tanto, que el colapso se produce sólo en

los vanos extremos. Si esto es así, cada vano extremo se comportará como una viga empotrada apoyada en el colapso, y el factor de carga vendrá dado por la ecuación (3.13). Como puede verse en la figura 3.8 (b), es posible dibujar el diagrama de momentos flectores en el colapso para los vanos extremos, pero no para el resto de la viga. La viga en el colapso conserva una redundancia, digamos, por ejemplo, el momento flector sobre el apoyo central, y la línea reactante de los tramos interiores no puede determinarse empleando sólo el análisis plástico.

Sin embargo, el Teorema I confirma que el mecanismo de colapso supuesto es correcto. La condición de equilibrio se satisface ya que en la figura 3.8 (b) el diagrama de momentos es una combinación de momentos libres y de una línea reactante adecuada. Ciertamente, la condición de mecanismo se satisface también, si bien debido a la simetría que forman dos mecanismos independientes. La tercera y última condición, la de cedencia, se satisface claramente si se dibuja la línea reactante en la posición de la figura 3.8 (b); en las rótulas plásticas se alcanza el momento plástico último, pero éste no se supera en ningún otro punto de la viga. Por consiguiente, el factor de carga correspondiente al diagrama de momentos flectores de la figura 3.8 (b), es el verdadero factor de carga de colapso.

Este último ejemplo nos sirve para ilustrar un colapso *"hipercompleto"*, ya que se han formado dos mecanismos independientes. Mecanismos de este tipo, con más de un grado de libertad, pueden formarse, normalmente, cuando hay simetría en el pórtico, o cuando las cargas aplicadas alcanzan ciertos valores críticos. En ambos casos, una ligera variación de las dimensiones del pórtico o de las cargas suprimirá los mecanismos extra.

Al mismo tiempo, la viga de cuatro vanos colapsó de forma *parcial*, ya que en el colapso quedó una redundancia. Un mecanismo *regular* es de un grado de libertad e incluye a todo el pórtico, de manera que en el colapso no hay redundancias.

Método de la combinación de mecanismos

Los teoremas fundamentales del análisis plástico han conducido a diversos métodos para hallar los factores de carga en el colapso. Los más sencillos quizá sean los de prueba y error. Uno de estos últimos consiste en suponer un cierto mecanismo de colapso, a partir del cual se calcula un límite superior del verdadero factor de colapso. A partir de un examen del correspondiente diagrama de momentos flectores, que en general incumplirá la condición de cedencia, es posible calcular un límite inferior del factor de carga de colapso. Se obtiene además una indicación de cómo hay que modificar el mecanismo, suprimiendo algunas rótulas y añadiendo otras, para mejorar la estimación del factor de carga. De esta forma se puede "acotar" el verdadero factor de carga, aproximando sus límites sucesivamente. Este proceso puede ser bastante rápido, incluso para pórticos relativamente complejos; no obstante, cuando el colapso es parcial, la obtención del límite inferior puede resultar laboriosa.

Otro método de prueba-error consiste en dibujar sobre el papel los diagramas de momentos flectores libres y tantear con diversas líneas reactantes. Este método resulta cómodo para vigas continuas, pero se vuelve difícil para pórticos. Para cargas complicadas, el método presenta la ventaja de trabajar directamente con diafragmas de momentos flectores. Otros métodos más elaborados deberán, finalmente, calcular los citados diagramas para verificar que las tres condiciones básicas se cumplen.

Se ha elaborado, también, un método de redistribución de momentos plásticos que trabaja con las condiciones de equilibrio y de cedencia. Se requiere cierta habilidad para llegar rápidamente a la respuesta correcta, pero en cada etapa del cálculo el factor de carga es, por supuesto, un límite inferior del verdadero factor de carga, de manera que pueden interrumpirse los cálculos con seguridad en cualquier momento.

Debe mencionarse, así mismo, que se ha ideado un método completamente automático, para análisis y cálculo, que puede ser programado para un ordenador; no resulta adecuado, sin embargo, para el cálculo manual. El método más potente ideado hasta la fecha para cálculo manual es el de la combinación de mecanismos. Más adelante se dará un detallado ejemplo, pero los principios

del método se expondrán en relación con el pórtico de un vano estudiado en el Capítulo 2.

Ejemplo 3.3. Se ha redibujado la figura 1.16 en la figura 3.9. Se supondrá que el pórtico es de sección constante con un momento plástico último M_p, y se quiere hallar el factor de carga de colapso aplicado a las cargas V y H. Si tanto V como H son siempre positivos, sólo hay tres posibles modos de colapso, dibujados en la figura 3.9.

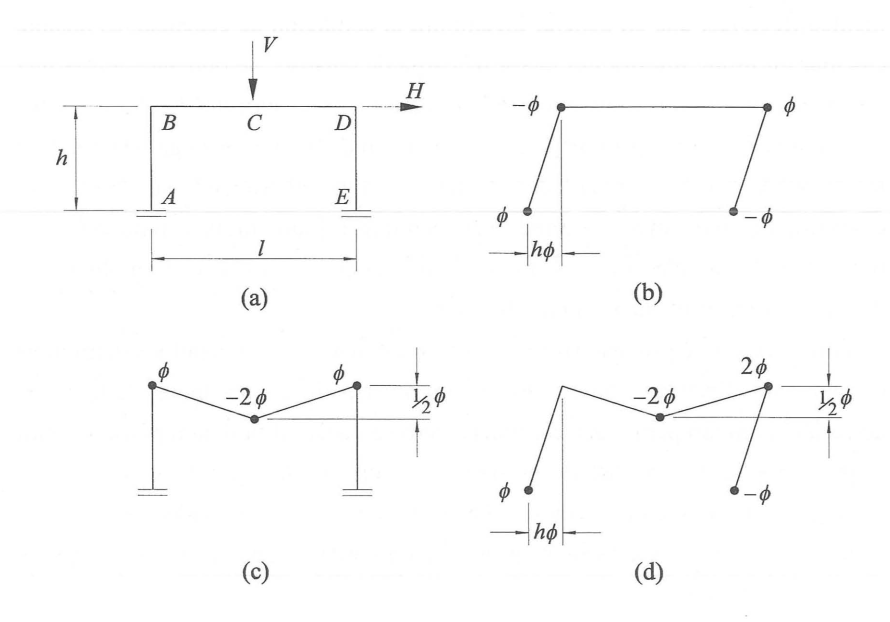


FIGURA 3.9

Recuérdese que el pórtico tiene cinco secciones críticas, en las que pueden formarse rótulas plásticas, A-E en la figura 3.9(a). El pórtico tiene tres redundancias, de manera que dos ecuaciones de equilibrio deben relacionar los cinco valores de los momentos flectores en las secciones críticas. Así, las figuras 3.9(b) y (c) representan dos posibles mecanismos independientes, a partir de los cuales pueden obtenerse dichas ecuaciones; como se vio en el Capítulo 1 (ecuación 1.23) un tercer mecanismo puede obtenerse superponiendo los dos mecanismos independientes, figura 3.9(d).

Los dos mecanismos independientes son también posibles mecanismos de *colapso* del pórtico. Si se escribe la ecuación del trabajo para el modo 1, figura 3.9(b), llegamos a

$$\lambda_1 \, H(h\phi) = 4M_p\phi$$

esto es

$$\lambda_1 \, Hh = 4M_p \qquad (3.15)$$

Análogamente, para el modo 2, figura 3.9(c),

$$\lambda_2 \frac{Vl}{2} = 4M_p \qquad (3.16)$$

Al comparar las ecuaciones (3.15) y (3.16) con las ecuaciones generales de equilibrio (1.21) y (1.22), se verá que cada una de las ecuaciones de colapso plástico representa la "maximización" de la correspondiente ecuación de equilibrio. La superposición de los dos mecanismos independientes llevó a la suma de las ecuaciones de equilibrio (1.21) y (1.22) para llegar a la ecuación (1.23). De forma análoga pueden combinarse las ecuaciones del colapso plástico. A partir de las ecuaciones (3.15) y (3.16), se llega a

$$\lambda_3\left(Hh + \frac{Vl}{2}\right) = 6M_p \qquad (3.17)$$

El lado izquierdo de la ecuación (3.17) es simplemente la suma de los lados izquierdos de las ecuaciones (3.15) y (3.16). Los lados derechos, ambos $4M_p$, representan el trabajo plástico disipado en las rótulas. Refiriéndonos a la figura 3.9 (b), el trabajo realizado es $4M_p\phi$, del que $M_p\phi$ es la contribución de la rótula en B. Análogamente, en la figura 3.9 (c), $M_p\phi$ es la contribución de la rótula B al trabajo total $4M_p\phi$. Ahora bien, en el mecanismo combinado, figura 3.9 (d), la rótula en B ha resultado *anulada*, de manera que hay que ignorar la contribución en B para ambos mecanismos. Por tanto, el total del lado derecho de la ecuación (3.17) es $6M_p$, y no $8M_p$. La ecuación (3.17) podría haberse deducido también a partir de la figura 3.9(d).

La anulación de rótulas es la clave del método de la combinación de mecanismos. Primero, se escriben las ecuaciones de colapso para el relativamente pequeño número de mecanismos independientes de un pórtico. Después, se combinan estos mecanismos de manera que desaparezcan rótulas y que el mecanismo combinado posea todavía un grado de libertad. De esta manera puede irse reduciendo el valor del factor de carga. El factor de carga de cualquier mecanismo tiene que ser, por supuesto, un límite superior del verdadero factor de carga de colapso λ_c. La combinación de mecanismos persigue, pues, la reducción en cada etapa del valor de λ.

Se realizará a continuación un ejemplo numérico: supóngase que los valores de cargas y dimensiones son tales que se verifica que $Hh = 20$, $Vl = 60$, y $M_p = 15$ unidades. Las ecuaciones de los mecanismos independientes son, a partir de las ecuaciones (3.15) y (3.16),

$$\left.\begin{array}{ll} (1) & \lambda_1(20) = 4(15); \quad \lambda_1 = 3{,}0 \\ (2) & \lambda_2(30) = 4(15); \quad \lambda_2 = 2{,}0 \end{array}\right\} \qquad (3.18)$$

En esta fase, podría sacarse la conclusión de que el mecanismo lateral no se producirá, ya que se forma para un factor de carga 3,0, mientras que el mecanismo de viga se forma para un factor de carga más bajo, 2,0. Como se ha visto, ambos mecanismos independientes sólo pueden combinarse de una forma, anulando la rótula en B. La ecuación de colapso para el modo 3 puede obtenerse, pues, de la siguiente forma:

$$\begin{array}{lll} & (1) & \lambda(20) = 4(15) \\ & (2) & \lambda(30) = 4(15) \\ \hline & & \lambda(50) \quad 8(15) \\ \text{Anular rótula en } B\text{:} & & \qquad\quad 2(15) \\ \hline & (3) & \lambda_3(50) = 6(15);\ \lambda_3 = 1{,}8 \end{array} \qquad (3.19)$$

Por tanto, para los valores numéricos anteriores, parece que el modo correcto es el 3, ya que da un factor de carga 1,8, menor que el del modo 2. Para demos-

trar que 1,8 es el factor de carga de colapso hay que comprobar que la distribución de momentos flectores en el colapso satisface la condición de cedencia. La figura 3.10 muestra la distribución de colapso de los momentos flectores correspondiente al modo de la figura 3.9 (d). Evidentemente, si se demuestra que M_B es menor que M_p (= 15 unidades), entonces, se satisfará la condición de cedencia. Como en el momento del colapso el pórtico es isostático, el valor de M_B puede hallarse por simple estática.

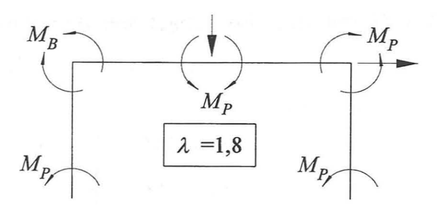


FIGURA 3.10

La ecuación del trabajo virtual nos suministra una forma más rápida y elegante de obtener el valor de M_B, usando los *mismos mecanismos* empleados en el análisis de colapso. Por ejemplo, tomando el mecanismo lateral de la figura 3.9 (b) y combinándolo con la distribución de colapso de la figura 3.10, se obtiene

$$(1,8)(20) = 3(15) + M_B \tag{3.20}$$

Compárese esta ecuación con la primera de las ecuaciones (3.18); el valor obtenido de M_B es de –9 unidades, menor numéricamente que M_p = 15. Utilizando el mecanismo de viga, figura 3.9 (c), se llega a

$$(1.8)(30) = 3(15) - M_B \tag{3.21}$$

que conduce, por supuesto, al mismo valor de M_B. Se ha demostrado que la distribución de momentos de la figura 3.10 satisface las condiciones de equilibrio, mecanismo y cedencia, de manera que el factor de carga de colapso es 1,8.

Diagramas de interacción

En ocasiones resulta conveniente mostrar en un solo diagrama todos los posibles modos de colapso de un pórtico. Este tipo de diagramas no será, en general, de gran ayuda al analizar estructuras complejas; no obstante, dado que las ecuaciones relevantes se han escrito ya, —ecuaciones (3.15), (3.16) y (3.17)— se usará este diagrama para ilustrar el comportamiento del pórtico rectangular de un vano. Si se quiere alcanzar un factor de carga λ constante, y se incorpora este valor de λ en los valores de V y H, entonces las ecuaciones de colapso pueden escribirse en la forma

$$\left.\begin{aligned} Hh &= 4M_p \\ Vl &= 8M_p \\ 2Hh + Vl &= 12M_p \end{aligned}\right\} \qquad (3.22)$$

Tomando sobre los ejes Vl/M_p y Hh/M_p, las ecuaciones (3.22) se han dibujado en la figura 3.11, para formar el diagrama de interacción. Un punto en este diagrama representa un *punto de carga*, esto es, representa ciertos valores de V y H. Cuando el punto de carga está sobre el contorno sombreado, se producirá el colapso del pórtico según uno de los tres modos posibles. Si el punto de carga que-

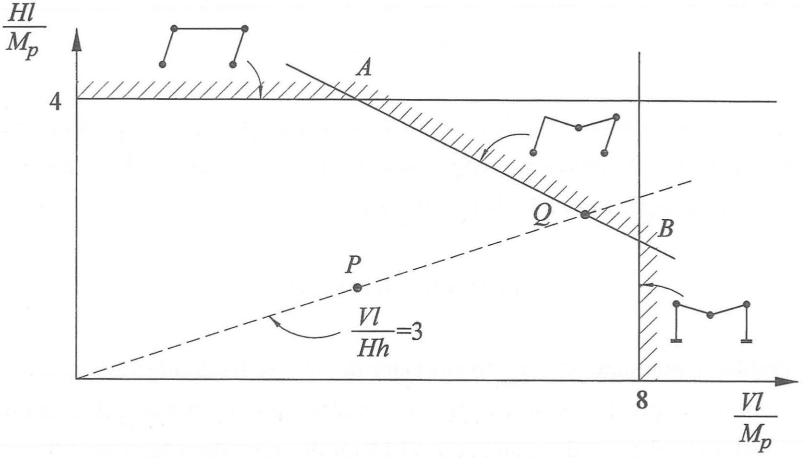


FIGURA 3.11

da dentro del contorno, esto es, hacia el origen, los valores correspondientes de las cargas será tales que el colapso no se producirá. Un punto situado fuera del contorno representa una combinación de cargas que el pórtico no puede soportar.

El punto P del diagrama de la figura 3.11 tiene coordenadas $Vl/M_p = 4$ y $Hh/M_p = 4/3$. Este punto representa el estado del pórtico con los valores de servicio de la carga del ejemplo numérico que acabamos de realizar. Si las cargas V y H crecen lenta y proporcionalmente desde cero, el punto de carga seguirá una línea recta OP. Si se incrementan las cargas, el colapso ocurrirá en Q. El factor de carga de colapso ($\lambda_c = 1{,}8$) viene dado por la relación OQ/OP en el diagrama.

Nótese que si el punto de carga coincide con los puntos A ó B se producirá un colapso *hipercompleto*, pero que si la luz l variara ligeramente, el punto de carga

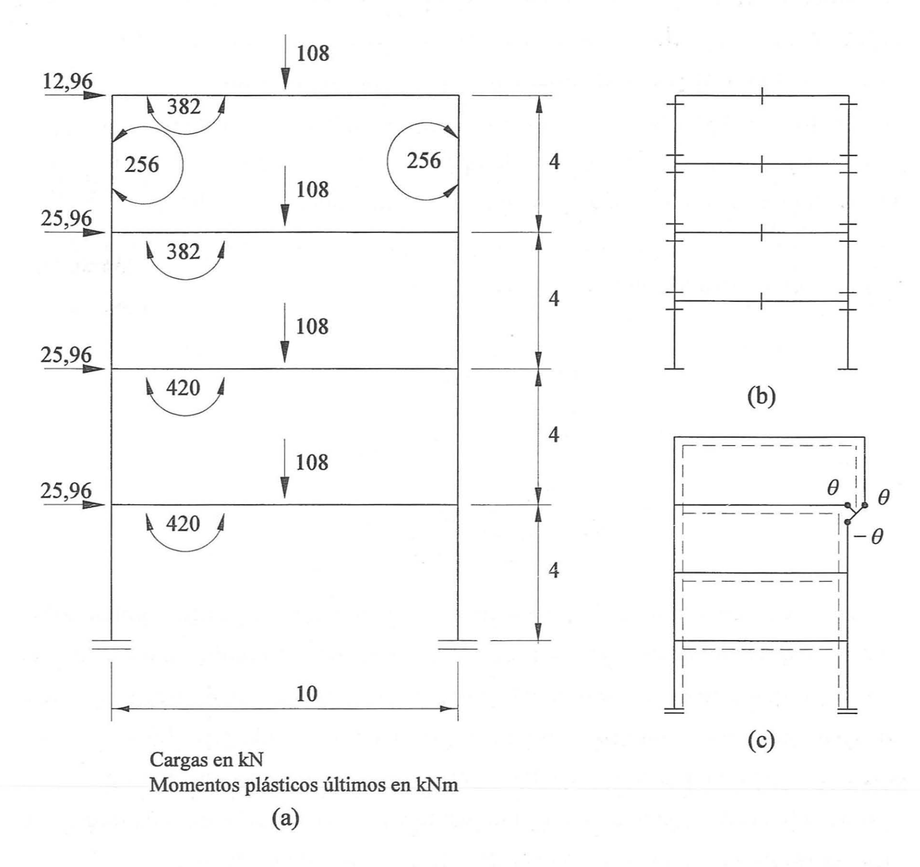


FIGURA 3.12

se movería, de manera que se produciría uno de los dos modos de colapso con un grado de libertad.

Ejemplo 3.4. A continuación se verá un último ejemplo de la aplicación del método de la combinación de mecanismos a un pórtico más complejo. La figura 3.12 (a) muestra las cargas y dimensiones de un pórtico de cuatro plantas. El momento plástico último de las dos vigas superiores es 382 kNm, el de las dos vigas inferiores 420 kNm, y el de los pilares 256 kNm. Se quiere hallar el factor de carga de colapso.

En la figura 3.12 (b) se han marcado las secciones críticas en las que pueden formarse rótulas plásticas; suman 26. El pórtico tiene 12 redundancias, de manera que tienen que existir 14 ecuaciones de equilibrio independientes (esto es, mecanismos independientes). Son particularmente importantes las ecuaciones que representan el equilibrio en cada una de las uniones entre viga y pilar. El momento en el extremo de cada viga tiene que ser igual, numéricamente, a la suma de los momentos que actúan en los extremos de los pilares adyacentes. Como esta igualdad es una de las condiciones de equilibrio, puede deducirse de un mecanismo y el mecanismo adecuado para una unión cualquiera se ha dibujado en la figura 3.12 (c). Para este pórtico en concreto hay seis mecanismos de unión de este tipo. Puede realizarse, pues, la siguiente tabla:

26 secciones críticas
12 redundancias
14 mecanismos independientes
6 nudos
8 mecanismos "auténticos"

Si pueden encontrarse 8 mecanismos independientes, entonces, juntándolos con las 6 ecuaciones de nudo, sería posible construir por combinación todos los mecanismos posibles. La figura 3.13 muestra ocho mecanismos independientes, uno por cada viga, y uno por desplazamiento lateral de cada piso. Puede demostrarse que, para un pórtico de cualquier número de vanos y alturas, la suma de los mecanismos para cada viga, para cada planta y para la rotación de cada nudo, nos dará exactamente el número preciso de mecanismos independientes.

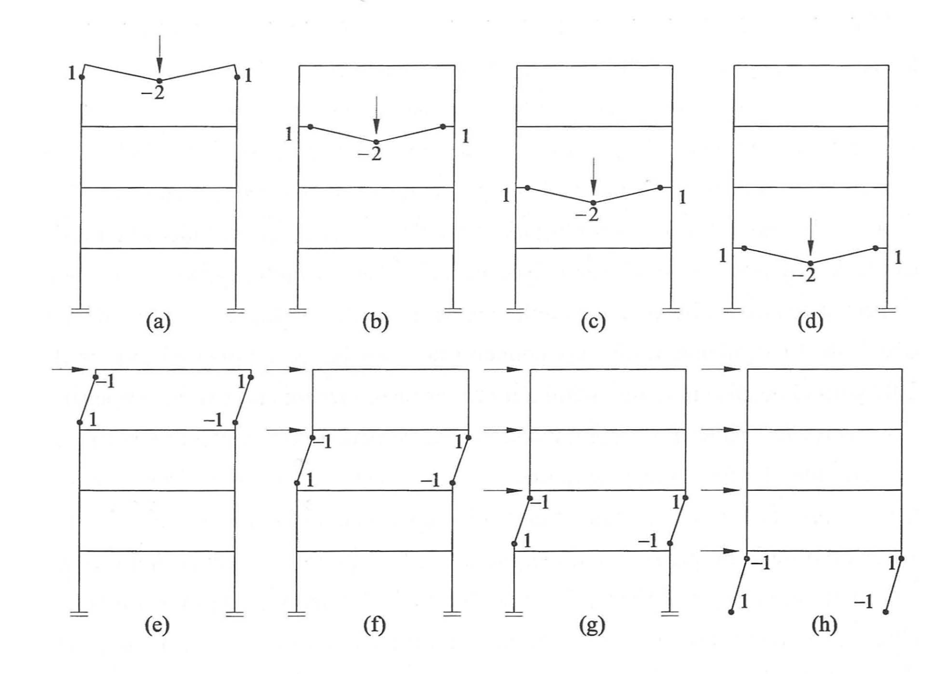


FIGURA 3.13

Ya que las ecuaciones del trabajo son homogéneas respecto al parámetro (ϕ) de los giros en las rótulas, se han especificado los mecanismos de la figura 3.13 en función de giros unitarios. Para el colapso de la viga superior

$$(108\lambda)(5) = [(2)(382) + (2)(256)] \tag{3.23}$$

esto es,

Análogamente,

$$\left.\begin{array}{lll} \text{(a)} & 540\lambda & = 1276;\ \lambda = \ 2{,}36 \\ \text{(b)} & 540\lambda & = 1528;\ \lambda = \ 2{,}83 \\ \text{(c)} & 540\lambda & = 1680;\ \lambda = \ 3{,}11 \\ \text{(d)} & 540\lambda & = 1680;\ \lambda = \ 3{,}11 \\ \text{(e)} & 51{,}8\lambda & = 1024;\ \lambda = 19{,}8 \\ \text{(f)} & 155{,}5\lambda & = 1024;\ \lambda = \ 6{,}59 \\ \text{(g)} & 259{,}2\lambda & = 1024;\ \lambda = \ 3{,}95 \\ \text{(h)} & 362{,}9\lambda & = 1024;\ \lambda = \ 2{,}82 \end{array}\right\} \tag{3.24}$$

En las ecuaciones (3.24), de (a) a (d) se refieren a los mecanismos de viga de la figura 3.13, y de (e) a (h) a los mecanismos laterales, de la misma figura. Estas ocho ecuaciones contienen toda la información necesaria para la solución del problema, recordando que los giros de nudo pueden usarse también a la hora de combinar mecanismos. El factor de carga menor dado por las ecuaciones (3.24) es $\lambda = 2{,}36$, para el mecanismo (a); ciertamente, entonces, el verdadero factor de carga de colapso no puede ser mayor de 2,36. No obstante, quizá sea posible combinar los mecanismos independientes para obtener un factor de carga menor que 2,36. El siguiente valor más pequeño de λ en las ecuaciones (3.24), es de 2,82 para el desplazamiento lateral del primer piso, mecanismo (h). Se empezará, pues, con este primer piso, combinando el mecanismo anterior con algún otro de manera que algunas rótulas se anulen, ya sea directamente o por giros de nudo. Considérese la figura 3.14, que muestra la superposición de los mecanismos (d) y (h). Se observará que si el nudo izquierdo de la viga gira en sentido horario, las rótulas de la viga y del pilar inferior se *"cerrarán"*, mientras que otra rótula *"se abre"* en el pilar superior. El resultado es un nuevo mecanismo (i), de un grado de libertad. Ahora bien, en las ecuaciones de trabajo (3.24) (d) y (h), en el lado derecho hay 420 y 256 unidades de trabajo para las dos rótulas que se cierran por el giro del nudo. Así, es posible restar 420 + 256 = 676 unidades al combinar los mecanismos, pero hay que añadir 256 por la apertura de la nueva rótula. Puede hacerse una tabla con el resultado neto de estas operaciones:

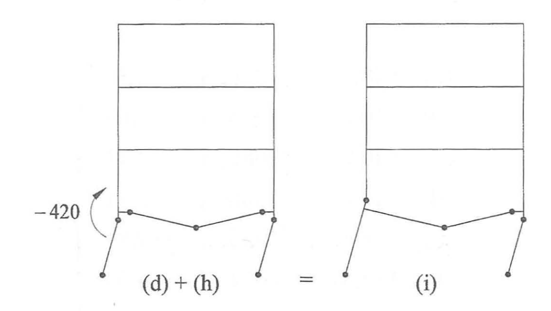


FIGURA 3.14

$$
\begin{array}{lr}
\text{(d)} & 540{,}0\lambda = 1680 \\
\text{(h)} & 362{,}9\lambda = 1024 \\
\hline
 & 902{,}9\lambda = 2704 \\
 & 420 \\
\hline
\text{(i)} & 902{,}9\lambda = 2284;\ \lambda = 2{,}53
\end{array}
$$

Como puede verse, el factor de carga del nuevo mecanismo (i) es 2,53, que es menor que el de cualquiera de los mecanismos (d) ó (h), pero todavía superior al valor de 2,36 para el mecanismo (a). La siguiente etapa en la combinación de mecanismos se muestra en la figura 3.15. Se añade el mecanismo lateral del segundo piso, anulándose inmediatamente la rótula formada por el giro del nudo. Como se trata de un pórtico de un vano y cuatro plantas, el término $M_p\phi$ aparece para esta rótula en ambas ecuaciones del trabajo (i) y (g); así, puede restarse $2M_p\phi$ para representar la anulación de la rótula. Además, el giro horario del nudo derecho cerrará las dos rótulas en los pilares, pero abrirá una nueva en la viga, y todo esto representa una resta de (256 + 256 – 420) = 92 unidades en la ecuación del trabajo.

$$
\begin{array}{lr}
 & \text{(i)} \quad 902{,}9\lambda = 2284 \\
 & \text{(g)} \quad 259{,}2\lambda = 1024 \\
\hline
 & 1162{,}1\lambda = 3308 \\
\text{Anulación de rótula:} & 512 \\
\hline
 & 1162{,}1\lambda = 2796 \\
\text{Giro del nudo:} & 92 \\
\hline
 & \text{(j)} \quad 1162{,}1\lambda = 2704;\ \lambda = 2{,}33
\end{array}
$$

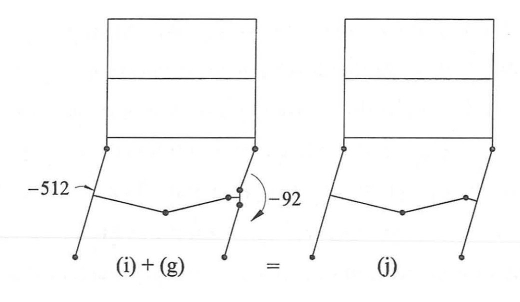


FIGURA 3.15

El mecanismo (j) da el menor factor de carga hasta el momento. Las siguientes etapas del proceso se muestran en la figura 3.16.

$$
\begin{array}{lll}
 & \text{(j)} & 1162{,}1\lambda = 2704 \\
 & \text{(c)} & 540{,}0\lambda = 1680 \\
\cline{2-3}
 & & 1702{,}1\lambda = 4384 \\
\text{Giro del nudo:} & & \phantom{1702{,}1\lambda = 4}420 \\
\cline{2-3}
 & \text{(k)} & 1702{,}1\lambda = 3964;\ \lambda = 2{,}33 \\
 & \text{(f)} & 155{,}5\lambda = 1024 \\
\cline{2-3}
 & & 1857{,}6\lambda = 4988 \\
\text{Anulación de rótula y giro del nudo:} & & \phantom{1857{,}6\lambda = 4}604 \\
\cline{2-3}
 & \text{(l)} & 1857{,}6\lambda = 4384;\ \lambda = 2{,}36 \\
 & \text{(b)} & 540{,}0\lambda = 1528 \\
\cline{2-3}
 & & 2397{,}6\lambda = 5912 \\
\text{Giro del nudo:} & & \phantom{2397{,}6\lambda = 5}382 \\
\cline{2-3}
 & \text{(m)} & 2397{,}6\lambda = 5530;\ \lambda = 2{,}31 \\
 & \text{(e)} & 51{,}8\lambda = 1024 \\
\cline{2-3}
 & & 2449{,}4\lambda = 6554 \\
\text{Anulación de rótula y giro del nudo:} & & \phantom{2449{,}4\lambda = 6}642 \\
\cline{2-3}
 & \text{(n)} & 2449{,}4\lambda = 5912;\ \lambda = 2{,}41 \\
 & \text{(a)} & 540{,}0\lambda = 1276 \\
\cline{2-3}
 & & 2989{,}4\lambda = 7188 \\
\text{Anulación de rótula:} & & \phantom{2989{,}4\lambda = 7}512 \\
\cline{2-3}
 & \text{(o)} & 2989{,}4\lambda = 6676;\ \lambda = 2{,}23
\end{array}
$$

La ecuación final (o), da el factor de carga más bajo, $\lambda = 2.23$, y parece probable que este mecanismo sea el modo correcto de colapso. No obstante, podría suceder que otra combinación de los mecanismos independientes originales diera un factor de carga más bajo. Para este ejemplo concreto, la única alternativa sería *eliminar* alguno de los mecanismos utilizados para llegar al mecanismo final (o), y no parece probable que esta eliminación redujera el factor de carga.

Para confirmar que el mecanismo (o) es correcto, habría que verificar que la condición de cedencia se satisface en todas las secciones críticas en las que no se

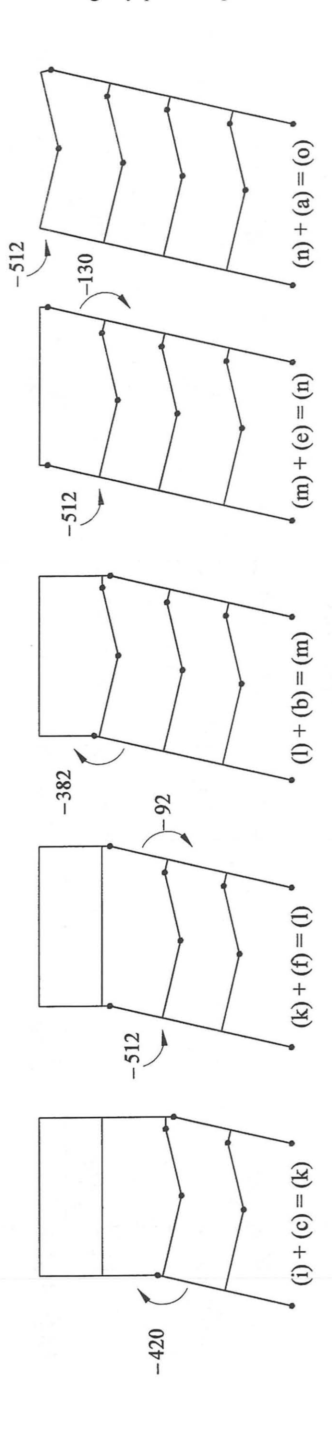
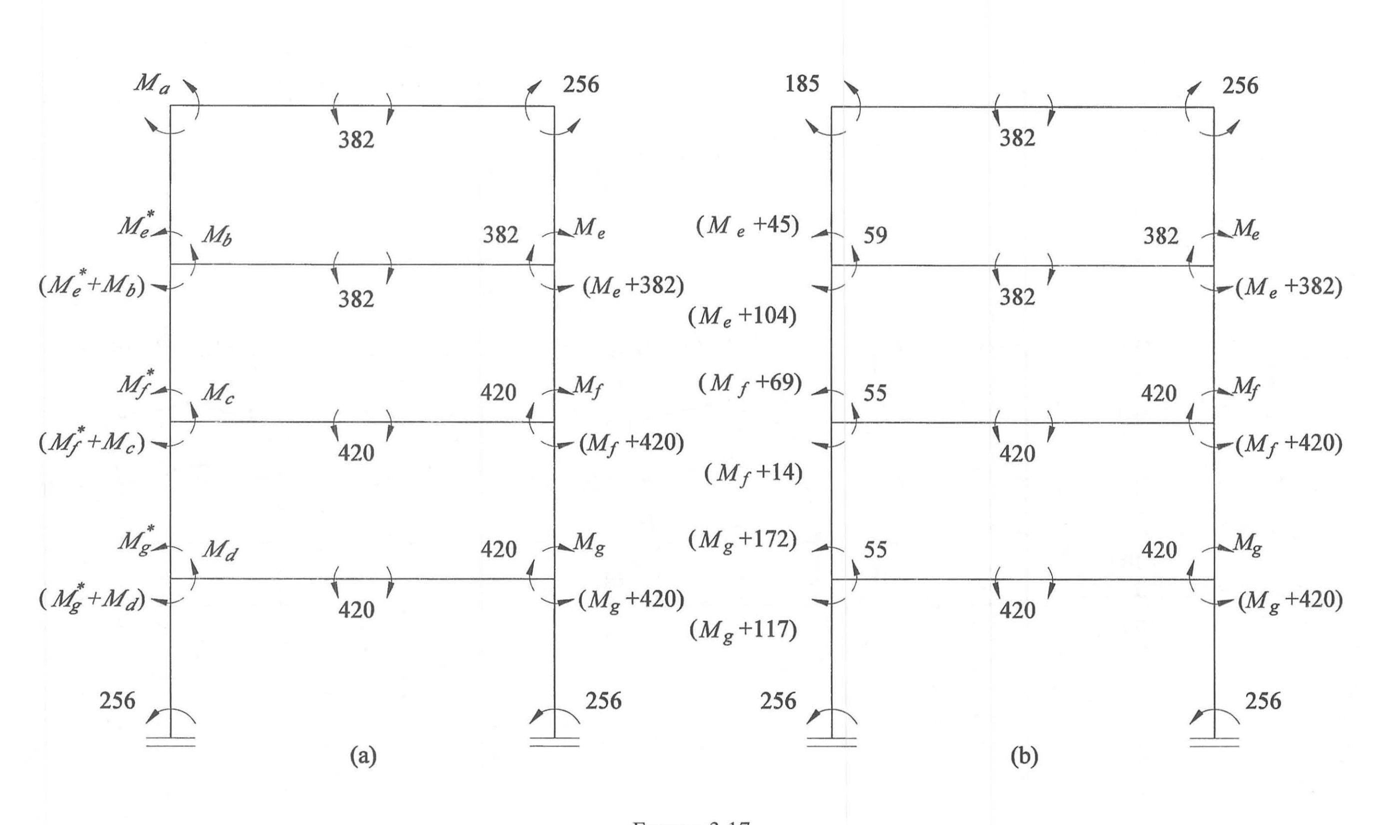


FIGURA 3.16



M_a
256
382
M_e^*
M_b
382
M_e
$(M_e^*+M_b)$
382
(M_e+382)
M_f^*
M_c
420
M_f
$(M_f^*+M_c)$
420
(M_f+420)
M_g^*
M_d
420
M_g
$(M_g^*+M_d)$
420
(M_g+420)
256
256
(a)
185
256
382
(M_e+45)
59
382
M_e
382
(M_e+382)
(M_e+104)
(M_f+69)
55
420
M_f
420
(M_f+420)
(M_f+14)
(M_g+172)
55
420
M_g
420
(M_g+420)
(M_g+117)
256
256
(b)

FIGURA 3.17

forma rótula plástica. El mecanismo (o) en la figura 3.16 tiene diez rótulas y, como el pórtico tenía originalmente doce redundancias, en el colapso se conservan tres redundancias. La figura 3.17 (a) muestra la distribución de momentos flectores en equilibrio en el colapso; en las rótulas se han introducido los valores de los momentos plásticos últimos y los otros momentos en las secciones críticas se han designado por símbolos. En cada caso se satisface el equilibrio, puesto que el momento total actuante es cero.

Para establecer relaciones entre los momentos en las secciones críticas, pueden emplearse los mecanismos de la figura 3.13 junto con la ecuación del trabajo virtual; si se emplea el factor de carga $\lambda = 2{,}23$, la forma de estas ecuaciones será similar a las de las ecuaciones (3.24)

$$\left.\begin{array}{ll}
(a) & (540)(2{,}23) = 1020 + M_a \\
(b) & (540)(2{,}23) = 1146 + M_b \\
(c) & (540)(2{,}23) = 1260 + M_c \\
(d) & (540)(2{,}23) = 1260 + M_d \\
(e) & (51{,}8)(2{,}23) = 256 + M_e^* - M_a - M_e \\
(f) & (155{,}5)(2{,}23) = 382 + M_f^* - M_e^* - M_b + M_e - M_f \\
(g) & (259{,}2)(2{,}23) = 420 + M_g^* - M_f^* - M_c + M_f - M_g \\
(h) & (362{,}9)(2{,}23) = 932 - M_g^* - M_d + M_g
\end{array}\right\} \quad (3.25)$$

La suma de todas las ecuaciones (3.25) elimina todos los momentos flectores desconocidos, y conduce a la identidad (2989,4) (2,23) = 6676, que es la ecuación de colapso para el mecanismo (o). De esta manera hemos verificado la corrección del cálculo numérico realizado en la combinación de mecanismos. Hay ocho ecuaciones (3.25) que relacionan diez incógnitas, pero como la ecuación de colapso está también incluida, permanecen tres redundancias en la estructura en estado de colapso.

La figura 3.17 (b) muestra la solución de las ecuaciones (3.25) en función de los momentos M_e, M_f y M_g. Esta distribución de momentos flectores está en equilibrio con las cargas de colapso aplicadas al pórtico. Si es posible encontrar *cualquier* distribución de equilibrio que satisfaga la condición de cedencia, esto confirmaría la validez del factor de carga de colapso 2,23. Esto es, si es posible

encontrar valores de M_e, M_f y M_g tales que todos los momentos en el pórtico son menores que el valor correspondiente del momento plástico último, entonces se habrá encontrado una distribución de equilibrio que satisface la condición de cedencia. Puede verse que cualquier valor de los momentos incógnita entres los límites

$$\left.\begin{array}{l} -256 < M_e < -126 \\ -256 < M_f < -164 \\ -256 < M_g < -164 \end{array}\right\} \qquad (3.26)$$

garantiza que todos los momentos en los pilares no superan el momento plástico último de 256 kNm. Los momentos en las vigas tampoco superan los valores de los momentos plásticos últimos y, por tanto, queda demostrado que el pórtico en colapso según el mecanismo (o) satisface las tres condiciones.

Colapso por incrementos

Los teoremas y cálculos expuestos hasta el momento se refieren a carga proporcional: todas las cargas crecen uniformemente hasta que se produce el colapso. Si las cargas de un pórtico pueden variar independientemente, entre ciertos límites, puede producirse un *colapso por incrementos* para un factor de carga λ_s menor que el factor de carga λ_c del *colapso estático*. Bajo una cierta combinación de las cargas variables independientes, es posible que se formen ciertas rótulas en el pórtico, y en ellas se producirán giros plásticos irreversibles. Estas rótulas no son suficientes en número para convertir el pórtico en un mecanismo. Bajo otra combinación de cargas pueden formarse otras rótulas que, de nuevo, son insuficientes en número para formar un mecanismo.

Sin embargo, ambos conjuntos de rótulas, *si se formaran simultáneamente*, podrían corresponder a un mecanismo de colapso estático. Si esto es así, entonces es posible un modo de colapso por incrementos. Por ejemplo, supongamos que las cargas V y H sobre un pórtico rectangular pueden variar independientemente entre cero y dos válores máximos $V_{\text{máx}}$ y $H_{\text{máx}}$. En la figura 3.18 (a), que

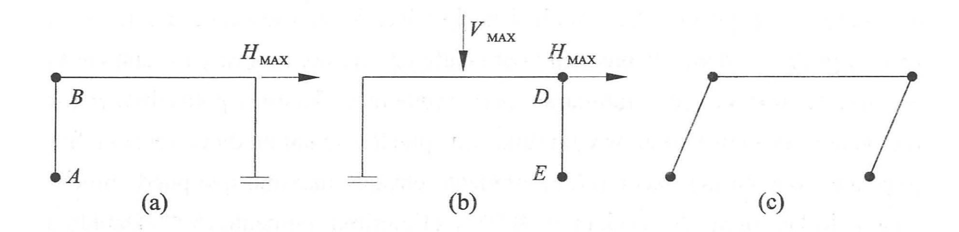


FIGURA 3.18

muestra la carga horizontal actuando en solitario, es posible que se formen rótulas en A y B, y que se produzcan giros plásticos en dichas rótulas. Si el pórtico se descarga, el pilar AB no estará ya vertical sino que tendrá una cierta ligera inclinación. Si ahora el pórtico se carga de nuevo con cargas verticales y horizontales, figura 3.18 (b), pueden formarse rótulas plásticas en D y E; al descargar, el pilar DE tendrá una cierta inclinación. Una nueva carga sólo con la fuerza horizontal hará que se formen de nuevo rótulas en A y B, y el pilar AB se inclinará más. Este ciclo de carga puede repetirse y, después de unos pocos ciclos, el pórtico tomará la forma de la figura 3.18 (c), esto es, su aspecto será el de un colapso lateral; un nuevo ciclo de carga, haría que las deformaciones aumentaran aún más.

Este tipo de colapso por incrementos se producirá si las magnitudes de V y H superan ciertos valores, que son calculables. Si las magnitudes de V y H son menores que dichos valores, entonces, una cierta deformación plástica puede producirse en los primeros ciclos de carga. Sin embargo, el pórtico resistirá finalmente cualquier futura variación de la carga de forma puramente elástica, y decimos que ha sufrido una *acomodación*. La frontera entre la acomodación y el colapso por incrementos recibe el nombre de *límite de acomodación*. Si se especifican los rangos de variación de las cargas de servicio, y estos rangos deben multiplicarse por un factor λ_S para que el pórtico alcance justo su límite de acomodación, entonces, λ_s es su *factor de carga de acomodación*. Más adelante se realizará un análisis numérico de acomodación para un pórtico rectangular.

En la discusión anterior se ha hablado sólo de la combinación de dos cargas, pero es posible, por supuesto, que en un pórtico más complejo haya que aplicar varias combinaciones de cargas para que se produzca un colapso por incrementos. Para calcular el factor de carga de acomodación será preciso realizar un aná-

lisis elástico del pórtico. Se calculará la distribución de momentos flectores en todo el pórtico independientemente para cada una de las cargas; para una cierta sección del pórtico, se combinarán estos momentos flectores para obtener los momentos elásticos máximos y mínimos que pueden actuar en dicha sección. Supongamos que en una sección i, el momento elástico máximo que puede producirse bajo las cargas de servicio es $\mathcal{M}_i^{\text{máx}}$, y el mínimo momento $\mathcal{M}_i^{\text{mín}}$. Debido a la deformación plástica en los primeros ciclos de carga, habrá en el pórtico algunos momentos flectores residuales; llamamos m_i al valor del momento residual en la sección i.

Ahora, si se va a producir la acomodación, esto es, no va a haber ningún giro plástico después de la deformación inicial, tiene que verificarse que

$$\left.\begin{aligned} \lambda_s \mathcal{M}_i^{\text{máx}} + m_i &\leqslant (M_p)_i \\ \lambda_s \mathcal{M}_i^{\text{mín}} + m_i &\geqslant -(M_p)_i \end{aligned}\right\} \tag{3.27}$$

Las desigualdades (3.27) son necesarias y suficientes para el cálculo del factor de carga de acomodación λ_s. Los teoremas de unicidad y del límite superior e inferior pueden demostrarse y corresponden a los mismos teoremas para el colapso estático. Por ejemplo, si para un cierto factor de carga λ puede encontrarse *cualquier* distribución de solicitaciones residuales m_i que satisfaga las desigualdades (3.27), entonces, $\lambda \leqslant \lambda_s$.

El teorema del límite superior conduce a un método muy similar al empleado en el colapso estático, y es posible combinar mecanismos para intentar obtener el verdadero valor λ_s del factor de carga de acomodación. Supongamos que se elige un cierto mecanismo de colapso por incrementos, y que el giro en la rótula de la sección i del pórtico es positivo. La rótula se formará cuando el momento total en la sección sea igual a $+ M_p$, de manera que la primera de las desigualdades (3.27) puede sustituirse por la igualdad:

$$\lambda_s \mathcal{M}_i^{\text{máx}} + m_i = (M_p)_i \tag{3.28}$$

Análogamente, si el giro en la rótula considerada es negativo, entonces

$$\lambda_s \mathcal{M}_i^{\text{mín}} + m_i = -(M_p)_i \tag{3.29}$$

Supongamos, en general, que el mecanismo elegido presenta giros θ_i en las rótulas. Podemos escribir, entonces, a partir de las ecuaciones (3.28) y (3.29),

$$\lambda_s \begin{Bmatrix} \mathcal{M}_i^{\text{máx}} \\ \mathcal{M}_i^{\text{mín}} \end{Bmatrix} \theta_i + m_i\theta_i = |(M_p)_i\theta_i| \tag{3.30}$$

En el primer término de la ecuación (3.30), $\mathcal{M}_i^{\text{máx}}$ o $\mathcal{M}_i^{\text{mín}}$ se elegirán según sea θ_i positivo o negativo en la sección i. El lado derecho de la ecuación (3.30) es, por supuesto, siempre positivo ya que un giro negativo multiplicaría a un valor negativo del momento plástico último. Si se escribe la ecuación (3.30) para cada rótula del mecanismo elegido y se suman todas esas ecuaciones, entonces

$$\lambda_s \sum \begin{Bmatrix} \mathcal{M}_i^{\text{máx}} \\ \mathcal{M}_i^{\text{mín}} \end{Bmatrix} \theta_i + \Sigma m_i\theta_i = \Sigma|(M_p)_i\theta_i| \tag{3.31}$$

Ahora bien, el término $\Sigma m_i\theta_i$ es igual a cero, por la ecuación del trabajo virtual; los momentos residuales m_i están en equilibrio con cargas exteriores nulas, y los giros de rótula θ_i corresponden a un mecanismo adecuado.

Por tanto,

$$\lambda_s \sum \begin{Bmatrix} \mathcal{M}_i^{\text{máx}} \\ \mathcal{M}_i^{\text{mín}} \end{Bmatrix} \theta_i = \Sigma|(M_p)_i\theta_i| \tag{3.32}$$

La ecuación (3.32) permite calcular el factor de carga de acomodación λ_s siempre que se conozca el verdadero mecanismo de colapso por incrementos. El teorema del límite superior establece que si se calcula un valor de λ a partir de la ecuación (3.32), para un cierto mecanismo, entonces, $\lambda \geqslant \lambda_s$.

Al combinar mecanismos para reducir el valor de λ, hay que sustraer términos de trabajo de *ambos* lados de ecuaciones similares a la (3.32). Supongamos que se construyen dos mecanismos independientes θ y ϕ, y que se superponen para anular una rótula en una cierta sección A del pórtico. Para que la rótula se anule el giro ψ_A del mecanismo θ tiene que anular el giro $-\psi_A$ del mecanismo ϕ; se pueden escribir las dos ecuaciones de mecanismo

$$\left.\begin{array}{l}\lambda_s\left[\mathcal{M}_A^{\text{máx}}\,\psi_A+\sum\begin{Bmatrix}\mathcal{M}_i^{\text{máx}}\\ \mathcal{M}_i^{\text{mín}}\end{Bmatrix}\theta_i\right]=(M_p)_A\psi_A+\Sigma|(M_p)_i\theta_i|\\ \lambda_s\left[\mathcal{M}_A^{\text{mín}}\,(-\psi_A)+\sum\begin{Bmatrix}\mathcal{M}_i^{\text{máx}}\\ \mathcal{M}_i^{\text{mín}}\end{Bmatrix}\phi_i\right]=(M_p)_A\psi_A+\Sigma|(M_p)_i\phi_i|\end{array}\right\}\qquad(3.33)$$

Sumando ambas ecuaciones:

$$\lambda_s\left[(\mathcal{M}_A^{\text{máx}}-\mathcal{M}_A^{\text{mín}})\psi_A+\sum\begin{Bmatrix}\mathcal{M}_i^{\text{máx}}\\ \mathcal{M}_i^{\text{mín}}\end{Bmatrix}(\theta_i+\phi_i)\right]$$
$$=2(M_p)_A\psi_A+\Sigma|(M_p)_i(\theta_i+\phi_i)|\qquad(3.34)$$

El nuevo mecanismo representado por la ecuación (3.34) no tiene ninguna rótula en la sección A, puesto que hemos supuesto que era precisamente allí donde se anulaba la rótula al combinar los mecanismos. No debe haber, por tanto, términos de trabajo en la sección A. En el lado derecho de la ecuación (3.34), hay que restar $2(M_p)_A\psi_A$, exactamente igual a como se hizo al combinar los mecanismos para hallar el modo de colapso estático. *Además*, habría que restar $(\mathcal{M}_A^{\text{máx}}-\mathcal{M}_A^{\text{mín}})\psi_A$ del *lado izquierdo* de la ecuación (3.34); el término de trabajo debido al *intervalo* de momentos elásticos en A desaparece al combinar los mecanismos.

Un sencillo ejemplo numérico aclarará el procedimiento.

Ejemplo 3.5. Se estudiará la acomodación del mismo pórtico rectangular de la figura 3.9. Supongamos que $l = 20$, $h = 10$, $H = 2$, $V = 3$ y $M_p = 15$, todo ello en unidades elegidas arbitrariamente. Se analizó el pórtico para condiciones de carga *estática* (proporcional), llegándose al valor $\lambda_c = 1{,}80$ (ecuación 3.19). Supongamos ahora que las cargas V y H pueden variar independientemente entre los límites

$$\left.\begin{array}{l}0\leqslant V\leqslant 3\\ 0\leqslant H\leqslant 2\end{array}\right\}\qquad(3.35)$$

es decir, que los valores máximos de V y H son los mismos que los elegidos previamente.

El pórtico se ha analizado elásticamente y los valores de los momentos flectores elásticos debidos a V y H en las cinco secciones críticas vienen dados por las ecuaciones (2.48) y (2.67). En base a ello puede formarse la siguiente tabla:

TABLA 3.1

	Debido a V		Debido a H		Carga combinada		
Sección	$\mathcal{M}^{máx}$	$\mathcal{M}^{mín}$	$\mathcal{M}^{máx}$	$\mathcal{M}^{mín}$	$\mathcal{M}^{máx}$	$\mathcal{M}^{mín}$	$\mathcal{M}^{máx} - \mathcal{M}^{mín}$
A	0	–3	6,25	0	6,25	–3	9,25
B	6	0	0	–3,75	6	–3,75	9,75
C	0	–9	0	0	0	–9	9
D	6	0	3,75	0	9,75	0	9,75
E	0	–3	0	–6,25	0	–9,25	9,25

Los dos mecanismos independientes del pórtico son los de las figuras 3.9 (b) y (c). Para el primero, el mecanismo lateral, los giros de rótula (θ_A, θ_B, θ_C, θ_D, θ_E) son (1, –1, 0, 1, –1). Al escribir la ecuación (3.32) habrá que usar dichos giros con los momentos ($\mathcal{M}_A^{máx}$, $\mathcal{M}_B^{mín}$, —, $\mathcal{M}_D^{máx}$, $\mathcal{M}_E^{mín}$) tomados de la tabla (3.1). Esta ecuación da

$$\lambda_s (6,25 + 3,75 + 9,75 + 9,25) = 4\ (15)$$

es decir,

$$\text{(b) } 29,00\lambda_s = 60;\ \lambda_s = 2,07 \tag{3.36}$$

Análogamente, el mecanismo de viga de la figura 3.9 (c), da

$$\text{(c) } 33,75\lambda_s = 60;\ \lambda_s = 1,78 \tag{3.37}$$

Ambos mecanismos pueden combinarse ahora para obtener el único mecanismo posible restante, figura 3.9 (d):

$$\begin{array}{lrr} & \text{(b)}\quad 29,00\lambda_s = & 60 \\ & \text{(c)}\quad 33,75\lambda_s = & 60 \\ \hline & 62,75\lambda_s & 120 \\ \text{Anular rótula } B: & 9,75\lambda_s & 30 \\ \hline & \text{(d)}\quad 53,00\lambda_s = & 90;\ \lambda_s = 1,70 \end{array} \tag{3.38}$$

El término 9,75 λ_s restado del lado izquierdo es $(\mathcal{M}_B^{\text{máx}} — \mathcal{M}_B^{\text{mín}})$ (1), ya que el giro de rótula en B se ha tomado como la unidad. Como puede verse el mecanismo de la figura 3.9 (d) ha dado el factor de carga más bajo, de manera que el factor de carga de acomodación del pórtico es $\lambda_s = 1{,}70$. Para este caso de un pórtico simple se conocían ya los tres modos de colapso posibles, y se han estudiado todos ellos. Para pórticos más complejos habría que verificar que no se incumplen las condiciones de cedencia. En un análisis de acomodación esto implica que deben satisfacerse las desigualdades (3.27). A continuación se realizará esta verificación para exponer los cálculos necesarios.

Para un factor de carga de 1,70 el pórtico está a punto de sufrir un colapso por incrementos con formación de rótulas en las secciones A, C, D y E. Así, en la sección A,

$$(1{,}70)(\mathcal{M}_A^{\text{máx}}) + m_A = \ \ 15$$

esto es

Análogamente,

$$\left.\begin{aligned} (1{,}70)\ (6{,}25) + m_A &= \ \ 15 \\ (1{,}70)\ \ \ (-9) + m_C &= -15 \\ (1{,}70)\ (9{,}75) + m_D &= \ \ 15 \\ (1{,}70)(-9{,}25) + m_E &= -15 \end{aligned}\right\} \tag{3.39}$$

De donde,

$$m_A = 4{,}37,\ m_C = 0{,}28,\ m_D = -1{,}54,\ m_E = 0{,}73 \tag{3.40}$$

Estos momentos residuales en las secciones críticas tienen que satisfacer las dos ecuaciones independientes de equilibrio; es decir, usando de nuevo los mecanismos de las figuras 3.9 (b) y (c), la ecuación del trabajo virtual da

$$\left.\begin{aligned} m_A - m_B + m_D - m_E &= 0 \\ m_B - 2m_C + m_D &= 0 \end{aligned}\right\} \tag{3.41}$$

Compárense las ecuaciones (3.41) con las ecuaciones (1.24). Las ecuaciones (3.41) pueden sumarse para dar

$$m_A - 2m_C + 2m_D - m_E = 0 \qquad (3.42)$$

y los valores de la ecuación (3.40) satisfacen la ecuación (3.42), habiéndose verificado la corrección del cálculo numérico realizado. A partir de cualquiera de las ecuaciones (3.41) se obtiene $m_B = 2{,}10$. A partir de la tabla 3.1, se obtiene (1,70) $\mathcal{M}_B^{\text{máx}} + m_B = 12{,}30$, y (1,70) $\mathcal{M}_B^{\text{mín}} + m_B = -4{,}28$. Ambos valores están dentro del intervalo ± 15, esto es, la condición de cedencia se satisface en la sección B, y se confirma la validez del factor de carga $\lambda_s = 1{,}70$.

El lector puede calcular por sí mismo el factor de carga λ_S en el ejemplo anterior para $0 \leqslant V \leqslant 3$, $-2 \leqslant H \leqslant 2$. El colapso por incrementos se produce para el modo de viga, figura 3.9 (c), para un factor de carga de 1,60. Para estas condiciones una reducción del factor de carga de más del 10 por ciento respecto al valor estático no es infrecuente. Si H representa la carga de viento y éste puede soplar en cualquier dirección, entonces, en edificios altos puede haber una reducción del factor de carga del 25 por ciento o más.

Los cálculos de acomodación para pórticos más complejos no son más difíciles que los cálculos correspondientes para el colapso estático. No obstante, hay que disponer de una solución elástica para poder tabular los valores de $\mathcal{M}^{\text{máx}}$ y $\mathcal{M}^{\text{mín}}$ par cada sección crítica.

Nótese que el análisis de colapso estático puede hacerse directamente si se dispone de una solución elástica. Para carga proporcional, hay un único valor $\mathcal{M}_i$ del momento flector elástico en cada sección crítica. Si se forma una rótula en dicha sección, entonces, de acuerdo con las ecuaciones (3.28) y (3.29), puede escribirse la ecuación

$$\lambda_c \mathcal{M}_i + m_i = \pm (M_p)_i \qquad (3.43)$$

Usando exactamente el mismo razonamiento que antes, la ecuación (3.32) se sustituye por

$$\lambda_c \Sigma \mathcal{M}_i \theta_i = \Sigma |(M_p)_i \theta_i| \qquad (3.44)$$

a partir de la cual es posible calcular el factor de carga de colapso estático λ_c empleando el método de la combinación de mecanismos. Si sólo se busca el factor

de carga estático el método resulta laborioso puesto que hay que obtener previamente la solución elástica.

Sin embargo, para calcular el factor de carga estático puede emplearse en lugar de los momentos elásticos $\mathcal{M}_i$ de la ecuación (3.44) *cualquier* conjunto de momentos en equilibrio. Empleando la notación de la ecuación (1.7), en una rótula se verifica

$$\lambda_c M_W + \Sigma \alpha_r m_r = \pm M_p \tag{3.45}$$

donde M_W es un momento flector en equilibrio con las cargas aplicadas para un factor de carga unidad, y $\alpha_r m_r$ representa los momentos residuales (reactantes). Por tanto,

$$\lambda_c \Sigma (M_W)_i \theta_i = \Sigma |(M_p)_i \theta_i| \tag{3.46}$$

ya que, como sucedía antes, los momentos reactantes desaparecen. Con frecuencia resulta fácil calcular un conjunto de momentos flectores en equilibrio con las cargas aplicadas, y la ecuación (3.46) suministra una buena base para el análisis estático de pórticos.

Análisis elasto-plástico

El pórtico de cuatro plantas del ejemplo 3.4, figura 3.12, colapsaba con diez rótulas, teniendo tres redundancias. En algunos casos, por ejemplo para el cálculo de los pilares, puede ser preciso conocer la distribución real de momentos en toda la estructura. El análisis plástico permitió obtener el mecanismo y factor de carga de colapso, pero no determinaba los valores de los momentos desconocidos (M_e, M_f y M_g en las desigualdades (3.26)). Si estos valores son necesarios, entonces hay que realizar un análisis elasto-plástico completo. Antes de hacer este análisis para el pórtico de cuatro plantas, se explicarán los cálculos haciendo referencia a la viga biempotrada de la figura 3.2.

Se usará la ecuación del trabajo virtual en la forma

$$\oint (\alpha_r m_r) \left(\frac{M}{B}\right) dx + \Sigma(\alpha_r m_r)\theta = 0 \tag{3.47}$$

Compárese esta ecuación con la ecuación elástica (2.56); el sumatorio extra contempla la posible aparición de discontinuidades de rótula. Una sencilla ecuación de equilibrio relaciona los tres valores M_A, M_B y M_C de la figura 3.2; esta ecuación, (3.1), es

$$2Wl = M_A - 3M_B + 2M_C \tag{3.48}$$

La ecuación (3.47) proporciona dos relaciones más para realizar un análisis completo.

Caso (a). Elástico, $Wl \leqslant (9/4)\, M_p$. La figura 3.19 (a) muestra una distribución completamente general de momentos residuales para la viga, en función de los momentos de extremo m_A y m_B. Las dos distribuciones de las figuras 3.19 (b) y (c) son, por tanto, independientes y se usarán en la ecuación del trabajo virtual (3.47). Como en la viga en régimen elástico no hay discontinuidades de articula-

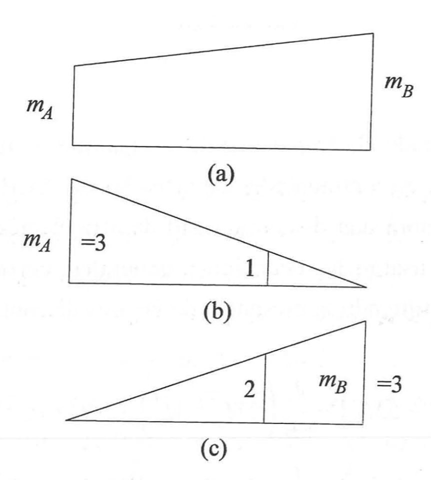


FIGURA 3.19

ción el término del sumatorio de la ecuación (3.47) se hará cero, y las dos relaciones son

$$\left.\begin{aligned} \frac{2l}{6B}\left(7M_A + 5M_B\right) + \frac{l}{6B}\left(2M_B + M_C\right) = 0 \\ \frac{2l}{6B}\left(2M_A + 4M_B\right) + \frac{l}{6B}\left(7M_B + 8M_C\right) = 0 \end{aligned}\right\} \tag{3.49}$$

La resolución de las ecuaciones (3.48) y (3.49) da los valores (3.2), es decir, $M_A = 6Wl/27$, $M_B = -8Wl/27$, $M_C = 12Wl/27$. Se usará la relación momento-curvatura elástica-perfectamente plástica de la figura 1.19 (b), de manera que los valores calculados de los momentos son válidos si $M_C \leqslant M_p$, es decir, $Wl \leqslant (9/4)\, M_p$. Si W crece por encima de este valor una articulación se formará en C y hay que realizar un nuevo análisis.

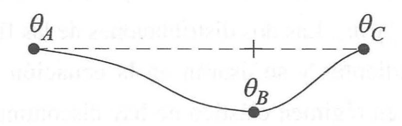


FIGURA 3.20

Consideremos el estado elasto-plástico de la viga que se muestra en la figura 3.20, con tres posibles discontinuidades de articulación. Si Wl excede justo del valor (9/4) M_p, sólo habrá una discontinuidad de articulación, en C, pero para evitar repeticiones se usarán las ecuaciones generales, correspondientes a las ecuaciones (3.49), permitiendo la presencia de las tres discontinuidades, que son

$$\left.\begin{aligned} \frac{2l}{6B}\left(7M_A + 5M_B\right) + \frac{l}{6B}\left(2M_B + M_C\right) + 3\theta_A + \theta_B = 0 \\ \frac{2l}{6B}\left(2M_A + 4M_B\right) + \frac{l}{6B}\left(7M_B + 8M_C\right) + 2\theta_B + 3\theta_C = 0 \end{aligned}\right\} \tag{3.50}$$

Caso (b). Una rótula, (9/4) $M_p \leqslant Wl \leqslant$ (81/28) M_p. Como se ha visto cuando Wl supera el valor (9/4) M_p, se forma una rótula en C. Consideremos el estado de la viga tal y como se muestra en la figura 3.5(a). Hay una discontinuidad de articulación θ_C en C y el valor de M_C se queda fijo en M_p; θ_A y θ_B en la ecuación (3.50) son cero. Ahora se pueden resolver las ecuaciones (3.50) y (3.48) para obtener

$$\left.\begin{aligned} M_A &= \frac{12}{27}Wl - \frac{1}{2}M_p \\ M_B &= -\frac{14}{27}Wl + \frac{1}{2}M_p \\ M_C &= M_p \\ \frac{B}{l}\theta_C &= \frac{1}{3}Wl - \frac{3}{4}M_p \end{aligned}\right\} \qquad (3.51)$$

El valor de θ_C tiene que ser positivo ya que el signo del giro de rótula tiene que coincidir con el del momento plástico último. Esta condición da $Wl >$ (9/4) M_p. Además, tanto M_A como M_B tienen que ser menores numéricamente a M_p; M_B se hace igual a $-M_p$ cuando $Wl = 81M_p/28$.

Caso (c). Dos rótulas, (81/28) $M_p \leqslant Wl \leqslant 3\ M_p$. El estado de la viga ahora está representado en la figura 3.5(b). $M_A = -M_B = M_p$, y no hay discontinuidad de articulación en A. Sustituyendo adecuadamente en las ecuaciones (3.50) y resolviendo el sistema,

$$\left.\begin{aligned} M_A &= 2Wl - 5M_p \\ M_B &= -M_p \\ M_C &= M_p \\ \frac{B}{l}\theta_B &= -\frac{14}{3}Wl + \frac{27}{2}M_p \\ \frac{B}{l}\theta_C &= \frac{8}{3}Wl - \frac{15}{2}M_p \end{aligned}\right\} \qquad (3.52)$$

La carga W puede crecer hasta el valor $W = 3M_p/l$ antes de que se forme la última rótula en A.

Flechas en el colapso

En el colapso de la viga biempotrada, los valores de M_A, M_B y M_C son numéricamente iguales a M_p, y la ecuación de equilibrio (3.48) da el valor de la carga de colapso. Las ecuaciones (3.50) se convierten en

$$\left.\begin{array}{l} \frac{1}{2}\frac{M_p l}{B} + 3\theta_A + \theta_B = 0 \\ -\frac{1}{2}\frac{M_p l}{B} + 2\theta_B + 3\theta_C = 0 \end{array}\right\} \quad (3.53)$$

Estas dos ecuaciones relacionan los tres valores desconocidos de los giros en las rótulas; resolviendo en función de θ_A.

$$\left.\begin{array}{l} \theta_A = \theta_A \\ \theta_B = -3\theta_A - \frac{1}{2}\frac{M_p l}{B} \\ \theta_C = 2\theta_A + \frac{1}{2}\frac{M_p l}{B} \end{array}\right\} \quad (3.54)$$

Los coeficientes de θ_A en estas expresiones representan los giros en las rótulas del mecanismo de colapso plástico (compárese con Fig. 3.4). Ahora bien, una de las rótulas será la última en formarse y como se ha mostrado en el análisis del apartado anterior esta última rótula se formará en A. Sin embargo, no es necesario seguir la historia completa del pórtico para determinar cuál es la última rótula en *formarse*.

Si se analiza el pórtico en el colapso, los giros de rótula pueden ponerse siempre en función de uno de ellos; esto es, falta una ecuación para determinar en forma única los giros de rótula. Los giros en las rótulas *en el momento del colapso* vienen dados por la condición de que uno de dichos giros es cero, mientras que el resto de los giros en las rótulas tienen el mismo signo que los momentos plásticos últimos que actúan en dichas rótulas.

Así, si en las ecuaciones (3.45), se hace cero θ_B ó θ_C, el valor de θ_A sería negativo, mientras que el momento plástico último en A sería positivo. Por tanto, los giros de la viga en el momento del colapso son

$$\left.\begin{aligned} \theta_A &= 0 \\ \theta_B &= -\frac{1}{2}\frac{M_p l}{B} \\ \theta_C &= \frac{1}{2}\frac{M_p l}{B} \end{aligned}\right\} \tag{3.55}$$

Ahora se pueden calcular los descensos en el colapso, bien por las ecuaciones de pendiente-flecha (teniendo en cuenta las discontinuidades en las rótulas) en este sencillo ejemplo, o bien, con mayor generalidad, usando la ecuación del trabajo virtual. Supongamos que se busca la flecha Δ en un cierto punto de un pórtico. Si una cierta distribución de momentos flectores m^* está en equilibrio con una carga *unidad*, aplicada en el punto elegido, y actuando en la dirección de Δ, entonces, aplicando la ecuación del trabajo virtual,

$$\Delta = \oint m^* \left(\frac{M}{B}\right) dx + \Sigma\, m^* \theta \tag{3.56}$$

La ecuación (3.56) es enteramente general y puede usarse para calcular las flechas elásticas y elasto-plásticas.

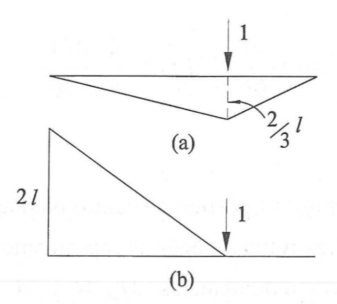


FIGURA 3.21

Para hallar la flecha bajo la carga en el colapso de la viga biempotrada, se considerará la distribución de momentos flectores de la figura 3.21 (a). Esta distribución está en *equilibrio* con la carga unidad actuando como muestra la figura, por tanto, según la ecuación (3.56),

$$\Delta w = \frac{2l}{6B}\left[\frac{2}{3}M_p l\right] + \frac{l}{6B}\left[\frac{2}{3}M_p l\right] + \left(-\frac{2}{3}l\right)(\theta_B) \tag{3.57}$$

Usando el valor de θ_B de las ecuaciones (3.55),

$$\Delta w = \frac{2}{3}\frac{M_p l^2}{B} \tag{3.58}$$

Siempre es posible encontrar una distribución de equilibrio m^* que *se anule en las rótulas*. Así, la distribución de la figura 3.21 (b) está en equilibrio con la carga unidad y es cero en B y C. Por supuesto, en la sección A actúa un momento (de valor $2l$) que es donde se forma la última rótula. Para construir esta distribución basta considerar la misma viga pero con articulaciones sin rozamiento en lugar de rótulas plásticas. Una viga de este tipo sigue siendo todavía una estructura, ya que la formación de la última rótula la convertiría en un mecanismo. Una carga unidad que actúe en esta nueva viga produciría una distribución de momentos en equilibrio que tiene que hacerse cero en las rótulas.

Si se emplea la distribución de la figura 3.21 (b) en la ecuación (3.56), ésta da directamente

$$\Delta w = \frac{2l}{6B}[2M_p l] = \frac{2}{3}\frac{M_p l^2}{B}$$

como antes.

Ejemplo 3.4 (continuación). El pórtico de cuatro plantas de la figura 3.12 colapsaba por la formación de diez rótulas, según el mecanismo (o) de la figura 3.16. En el colapso se mantenían tres redundancias: M_e, M_f y M_g en la figura 3.17 (b). A continuación se realizará un análisis completo del pórtico en el colapso, calculándose los valores de los tres momentos desconocidos.

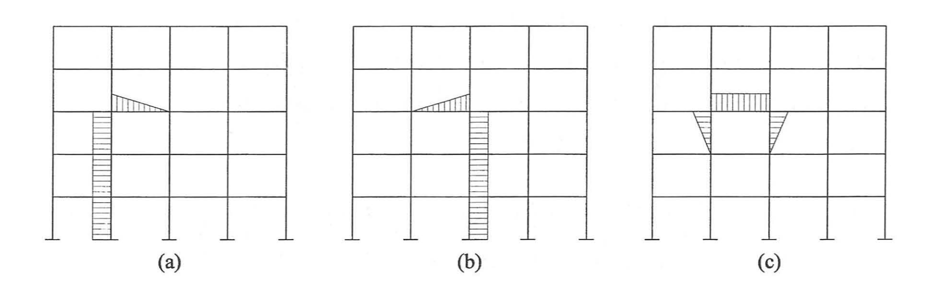


FIGURA 3.22

Al resolver el problema general de un pórtico plano de M vanos y N plantas, que tiene $3MN$ redundancias, resulta conveniente trabajar con tres distribuciones básicas de los momentos residuales para cada una de las MN vigas del pórtico. Las distribuciones que se muestran en la figura 3.22 son adecuadas, pero, como es natural, se pueden construir otras. A continuación, aplicaremos sucesivamente estas distribuciones al pórtico de cuatro plantas

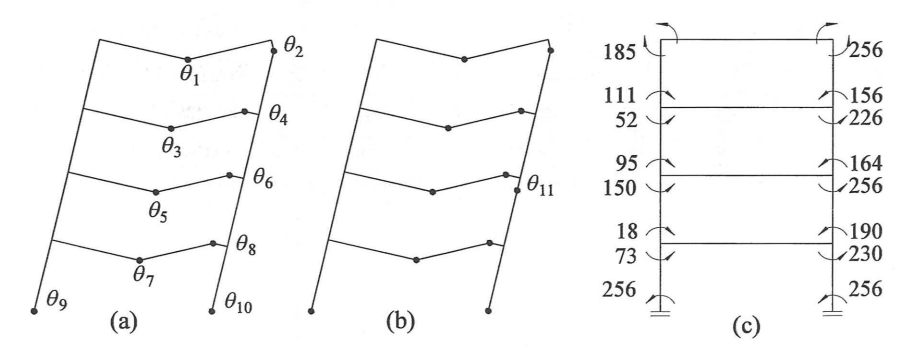


FIGURA 3.23

Llamando a los giros de rótula en el momento de colapso θ_1 a θ_{10}, figura 3.23 (a), y aplicando la ecuación (3.47) con las distribuciones de equilibrio de la figura 3.17 (b), entonces, las tres distribuciones básicas conducen a las doce ecuaciones siguientes:

$$\left.\begin{aligned}
&\frac{1}{2}\theta_1 && +\theta_9 && +\left(\frac{1}{14700}\right)(2M_e + 2M_f + 2M_g + 872) = 0 \\
&\frac{1}{2}\theta_1 + \theta_2 && +\theta_{10} + (\theta_{11}) && +\left(\frac{1}{14700}\right)(2M_e + 2M_f + 2M_g + 1155) = 0 \\
&\theta_1 + \theta_2 && && +\left(\frac{1}{14700}\right)\left(\frac{2}{3}M_e + 154\right) = 0
\end{aligned}\right\} \qquad (3.59)$$

$$\left.\begin{aligned}
&\frac{1}{2}\theta_3 && +\theta_9 && +\left(\frac{1}{14700}\right)(M_e + 2M_f + 2M_g + 598) = 0 \\
&\frac{1}{2}\theta_3 + \theta_4 && +\theta_{10} + (\theta_{11}) && +\left(\frac{1}{14700}\right)(M_e + 2M_f + 2M_g + 940) = 0 \\
&\theta_3 + \theta_4 && && +\left(\frac{1}{14700}\right)\left(\frac{4}{3}M_e + \frac{2}{3}M_f + 189\right) = 0
\end{aligned}\right\} \qquad (3.60)$$

$$
\left.
\begin{aligned}
&\frac{1}{2}\theta_5 + \theta_9 + \left(\frac{1}{14700}\right)(M_f + 2M_g + 384) = 0 \\
&\frac{1}{2}\theta_5 + \theta_6 + \theta_{10} + (\theta_{11}) + \left(\frac{1}{14700}\right)(M_f + 2M_g + 549) = 0 \\
&\theta_5 + \theta_6 + (\theta_{11}) + \left(\frac{1}{14700}\right)\left(\frac{4}{3}M_f + \frac{2}{3}M_g + 138\right) = 0
\end{aligned}
\right\}
\tag{3.61}
$$

$$
\left.
\begin{aligned}
&\frac{1}{2}\theta_7 + \theta_9 + \left(\frac{1}{14700}\right)(M_g + 199) = 0 \\
&\frac{1}{2}\theta_7 + \theta_8 + \theta_{10} + \left(\frac{1}{14700}\right)(M_g + 129) = 0 \\
&\theta_7 + \theta_8 + \left(\frac{1}{14700}\right)\left(\frac{4}{3}M_g + 149\right) = 0
\end{aligned}
\right\}
\tag{3.62}
$$

En estas ecuaciones los términos entre paréntesis (θ_{11}), deben ignorarse por el momento. El término (1/14700) es función de las rigideces a flexión del pórtico; en la expresión $B = EI$, se ha tomado $E = 205 \times 10^6$ kN/m^2, e I, para las vigas superiores, inferiores y pilares, respectivamente, 370, 410 y 143×10^{-6} m^4.

Cada grupo de tres ecuaciones puede combinarse para dar

$$\left.\begin{aligned}
&\theta_9 + \theta_{10} + (\theta_{11}) + \left(\frac{1}{14700}\right)\left(\frac{10}{3}M_e + 4M_f + 4M_g + 1873\right) = 0\\
&\theta_9 + \theta_{10} + (\theta_{11}) + \left(\frac{1}{14700}\right)\left(\frac{2}{3}M_e + \frac{10}{3}M_f + 4M_g + 1349\right) = 0\\
&\theta_9 + \theta_{10} + \left(\frac{1}{14700}\right)\left(\frac{2}{3}M_f + \frac{10}{3}M_g + 795\right) = 0\\
&\theta_9 + \theta_{10} + \left(\frac{1}{14700}\right)\left(\frac{2}{3}M_g + 179\right) = 0
\end{aligned}\right\} \quad (3.63)$$

Todavía ignorando (θ_{11}), puede verse que ($\theta_9 + \theta_{10}$) se puede eliminar, dejando tres ecuaciones en M_e, M_f y M_g; los valores son $M_e = -168$, $M_f = -115$, $M_g = -202$ kNm. Si se comparan estos valores con las desigualdades (3.26) resulta que el valor $M_f = -115$ no es permisible, puesto que se superaría el valor del momento plástico último. Debe formarse una *rótula extra* en el mecanismo de colapso, la discontinuidad θ_{11} en la figura 3.23(b); esta rótula determina el valor de M_f como -164.

Es preciso realizar un nuevo análisis, pero las ecuaciones (3.59) a (3.63) son las mismas excepto por la adición de los términos θ_{11} y por que M_f tiene ahora el valor -164. Las ecuaciones (3.63) conducen ahora a dos relaciones entre M_e y M_f al eliminar los giros de rótula; los valores son $M_e = -156$, y $M_f = -190$; en la figura 3.23 (c) se muestran los momentos flectores finales en los pilares. Ahora, puede resolverse el conjunto completo de ecuaciones en función de una discontinuidad de rótula, elegida convenientemente como θ_9 (ecuaciones 3.64).

Todos estos giros en las rótulas tienen que tener el mismo signo que los momentos plásticos últimos en ellas; esto es, todos los signos tienen que ser los mis-

$$\left.\begin{aligned}
\theta_1 &= -2\theta_9 + 296 \left(\frac{1}{14700}\right)\\
\theta_2 &= \ \ 2\theta_9 - 346 \ (\qquad)\\
\theta_3 &= -2\theta_9 + 532 \ (\qquad)\\
\theta_4 &= \ \ 2\theta_9 - 404 \ (\qquad)\\
\theta_5 &= -2\theta_9 + 320 \ (\qquad)\\
\theta_6 &= \ \ 2\theta_9 - 227 \ (\qquad)\\
\theta_7 &= -2\theta_9 - \ \ 18 \ (\qquad)\\
\theta_8 &= \ \ 2\theta_9 + 122 \ (\qquad)\\
\theta_9 &= \ \ \ \ \theta_9\\
\theta_{10} &= - \ \ \theta_9 - \ \ 52 \ (\qquad)\\
\theta_{11} &= \qquad\quad 114 \ (\qquad)
\end{aligned}\right\} \tag{3.64}$$

mos que los de los coeficientes de θ_9, que nos dan los giros del mecanismo de colapso plástico. Para $\theta_9 = (266/14700)$, el valor de θ_3 es justo cero, y los giros de las rótulas en el momento del colapso son:

$$\left.\begin{aligned}
\theta_1 &= -236 \left(\frac{1}{14700}\right)\\
\theta_2 &= \ \ 186 \ (\qquad)\\
\theta_3 &= \ \ \ \ \ 0\\
\theta_4 &= \ \ 128 \ (\qquad)\\
\theta_5 &= -212 \ (\qquad)\\
\theta_6 &= \ \ 305 \ (\qquad)\\
\theta_7 &= -550 \ (\qquad)\\
\theta_8 &= \ \ 654 \ (\qquad)\\
\theta_9 &= \ \ 266\\
\theta_{10} &= -318 \ (\qquad)\\
\theta_{11} &= \ \ 114 \ (\qquad)
\end{aligned}\right\} \tag{3.65}$$

Podemos ahora emplear los momentos flectores y giros en las rótulas, ya conocidos, para calcular los desplazamientos. Si se emplea la distribución m^* de la

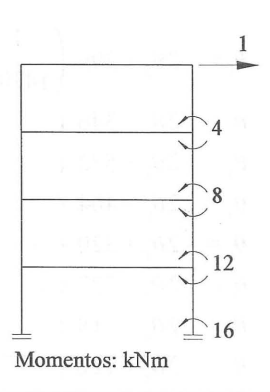


FIGURA 3.24

figura 3.24 para calcular la flecha lateral Δ en la coronación del edificio, la ecuación (3.56) da

$$\frac{\Delta}{4} = -2\theta_{11} - 4\theta_{10} + \left(\frac{1}{14700}\right)(-2M_e - 4M_f - 6M_g - 2036) = \frac{1116}{14700}$$

es decir, $\Delta = 0{,}304\ m$.

Problemas

Algunos de los problemas siguientes pueden ser resueltos de diferentes maneras, y el lector puede querer comparar los métodos expuestos en este libro.

Ecuaciones de equilibrio	Problema 1
Método de Macaulay	Problemas 2, 3, 4
Coeficientes de desplazamiento	Problemas 2, 3, 4, 8
Ecuaciones de pendiente-flecha	Problemas 2, 3, 4, 6, 7, 8, 9
Métodos del área de momentos	Problemas 5, 8
Métodos de la energía	Problemas 6, 7, 8, 9
Redistribución de momentos	Problemas 2, 4,7, 9, 10
Cargas de colapso	Problemas 11, 12, 13

1. Empleando mecanismos de barras rectas, determinar ecuaciones de equilibrio independientes para los pórticos de las figuras.

Sol. (a) $M_A - M_B + M_D - M_E = Hh_1$

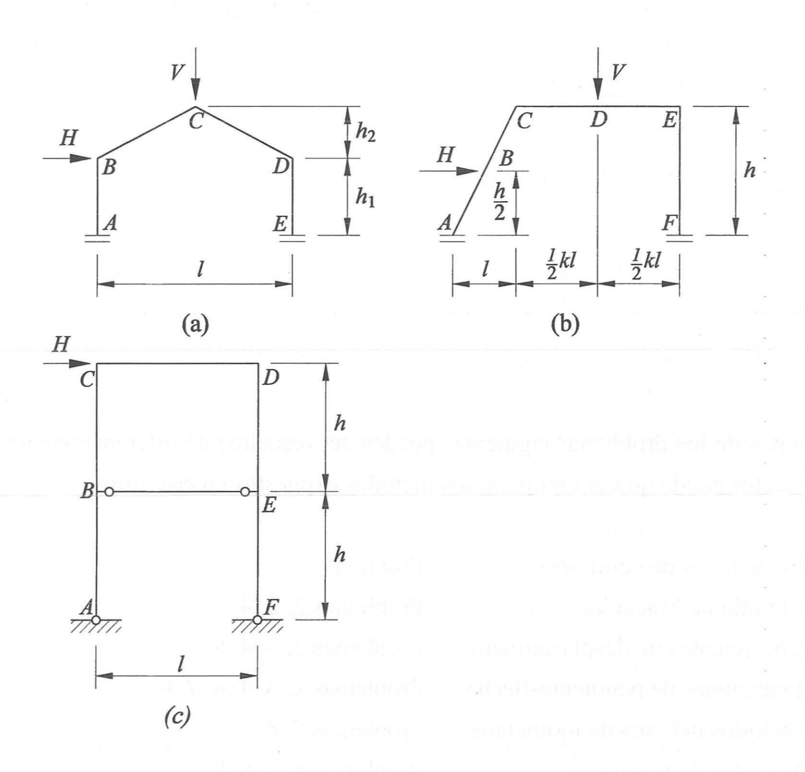
$M_B - 2M_C + (1 + 2h_2/h_1)M_D - (2h_2/h_1)M_E = Vl/2 + 2Hh_2$

(b) $M_A - 2M_B + M_C = Hh/2$

$M_C - 2M_D + M_E = kVl/2$

$$M_A - (1 + 1/k)(M_C - M_E) - M_F = \frac{Vl}{2} + \frac{Hh}{2}$$

(c) $M_E - M_B = Hh; \quad M_D - M_C = 2Hh$



Problema 1

2. Una viga recta de sección constante reposa en tres apoyos A, B y C, situados al mismo nivel. $AB = 2a$ y $BC = a$. La viga soporta una carga W uniformemente repartida entre A y B, y otra carga $2W$, también uniformemente repartida, entre B y C. Suponiendo que la viga permanece en régimen elástico, calcular las reacciones en A, B y C.

Sol. $3W/8$, $15W/8$, $3W/4$.

3. Una viga de sección constante soporta una carga W uniformemente repartida y descansa en tres apoyos A, B y C. $AB = BC = l/2$. Antes de entrar en carga

los tres apoyos están al mismo nivel; A y C son rígidos, pero B desciende una distancia λ bajo la acción de una carga unidad. Suponiendo un comportamiento elástico, calcular la reacción en B.

Sol. $5Wl^3/(8l^3 + 384B\lambda)$

4. Una viga elástica de sección constante y longitud $3a$ descansa sobre cuatro apoyos rígidos A, B, C y D, todos ellos situados al mismo nivel. $AB = BC = CD = a$. Hay cargas puntuales W actuando en mitad de los vanos AB y CD, y una carga $2W$ repartida uniformemente en el tramo BC. Calcular los momentos positivos y negativos máximos en la viga.

Sol. $7Wa/40$, $13Wa/80$.

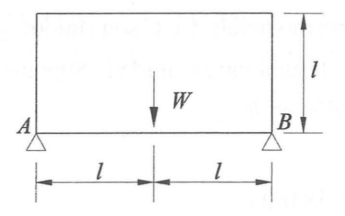
5. Empleando el método de las áreas de momentos, verificar los resultados de la tabla 2.3.

6. Cuatro vigas de sección constante, de longitud a y rigidez a flexión B, están unidas en sus extremos formando un pórtico cuadrado. El pórtico soporta la acción de dos fuerzas iguales y opuestas P, actuando en vértices opuestos. Calcular el valor del máximo momento flector y la variación de longitud de la diagonal.

Sol. $Pa/4\sqrt{2}$, $Pa^3/24B$.

7. Un pórtico rectangular de cuatro barras, todas de la misma sección y unidas rígidamente en los ángulos, está apoyado en A y B, como muestra la figura. Calcular el momento flector elástico en el vértice A, debido a la acción de la carga W.

Sol. $4Wl/21$.



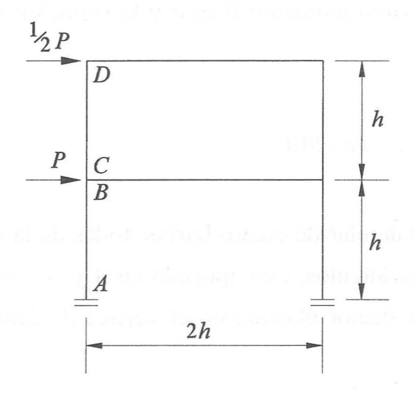
PROBLEMA 7

8. Un pórtico rectangular tiene sus apoyos articulados, salva una luz l y tiene una altura h. En toda la longitud de la viga actúa una carga repartida uniformemente W. Calcular el valor del momento flector en el centro de la viga.

Sol. $$-\frac{Wl}{8}\left(\frac{1+2h/l}{3+2h/l}\right)$$

9. El pórtico de la figura está empotrado en la base y tiene sus nudos rígidos. Calcular los momentos flectores elásticos debidos a la carga lateral. Todos los elementos del pórtico tienen la misma rigidez a flexión.

Sol. $M_A = 74Ph/152$; $M_B = -40Ph/152$; $M_C = 11Ph/152$,
$M_D = -27Ph/152$.



PROBLEMA 9

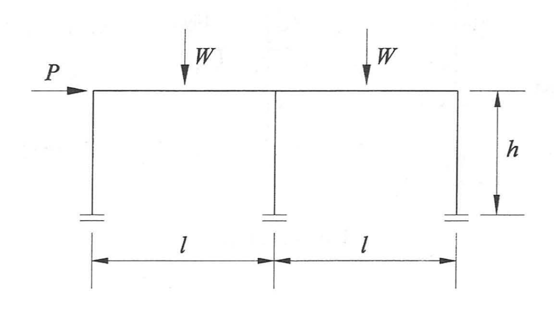
10. Resolver el problema de la figura 2.37 (ecuaciones (2.108) y siguientes) para los siguientes valores numéricos: $l = 12$ m; $h_1 = 5$ m; $h_2 = 2{,}5$ m, $H = 10$ kN.

Sol. $M_A = 14{,}2$; $M_B = -4{,}2$; $M_C = 2{,}0$; $M_D = 1{,}6$, $M_E = -5{,}0$ kN m.

11. Si las vigas de los pórticos de los problemas 2, 3, 4, 6, 7, 8 y 9, son de sección constante, resisten un momento plástico último M_p, y las cargas son tales que están en el momento de colapso, calcular el valor de dichas cargas.

Sol. $0{,}686Wa/4 = M_p$; $0{,}686Wl/32 = M_p$; $Wa/6 = M_p$; $Pa = 4\sqrt{2}\,M_p$; $Wl = 4M_p$; $Wl = 16M_p$; $3Ph = 8M_p$.

12. El pórtico de la figura se ha proyectado de sección constante M_p. Usando los ejes Ph/M_p, Wl/M_p, dibujar el diagrama de interacción.

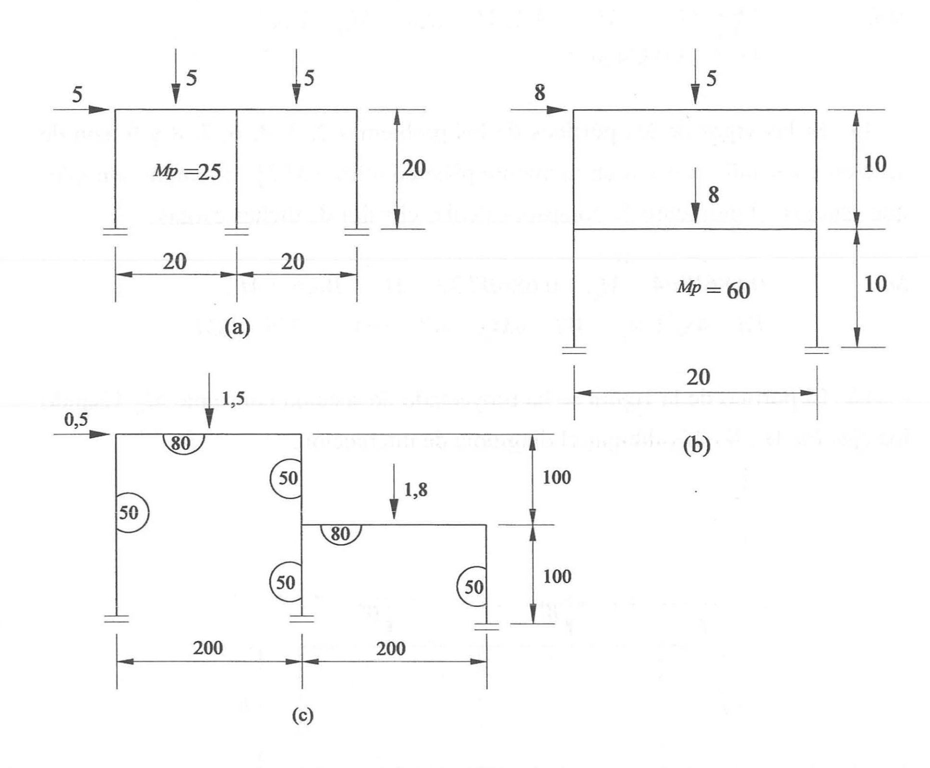


PROBLEMA 12

A continuación, calcular el valor de M_p para $h = 3$ m, $l = 6$ m, $P = 50$ kN, $W = 30$ kN (cargas mayoradas).

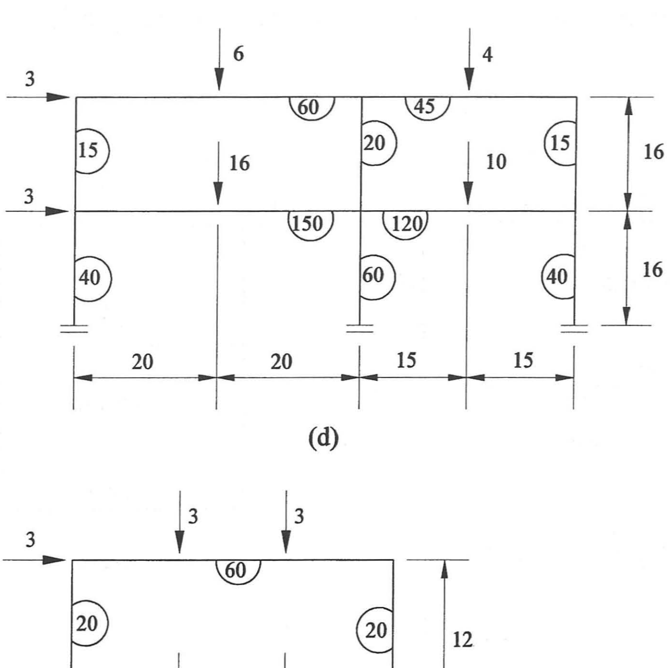
Sol. 30 kN m.

13. Calcular los factores de carga de colapso de los pórticos de la figura.

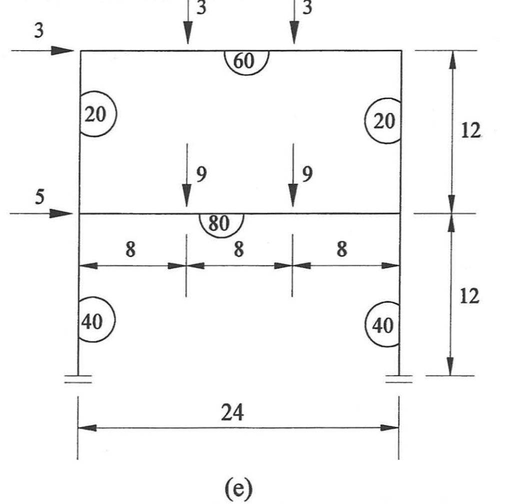


PROBLEMA 13

(continúa en pág. siguiente)



(d)



(e)

Sol. (a) 4/3, (b) 2, (c) 1,44, (d) 1,52, (e) 11/8.



PUBLICACIONES DEL INSTITUTO JUAN DE HERRERA

T. Anasagasti. *La enseñanza de la arquitectura.*
A. Ruiz de Arcaute. *Juan de Herrera.*
F. Bores, J. Fernández, S. Huerta y E. Rabasa (eds.). *Actas del Segundo Congreso Nacional de Historia de la Construcción.*
A. Casas, S. Huerta y E. Rabasa (eds.) *Actas del Primer Congreso Nacional de Historia de la Construcción.*
L. Canina. *L'architettura egiziana.*
F. Cassinello Pérez. *Construcción: Hormigonería*
A. Choisy. *El arte de construir en Roma.*
A. Choisy. *El arte de construir en Bizancio.*
A. Choisy. *Historia de la arquitectura.* (en preparación)
F. Chueca. *La catedral de Valladolid.*
J. García-Gutiérrez Mosteiro (ed.) *Cuaderno de apuntes de construcción de Luis Moya.*
A. Graciani, S. Huerta, E. Rabasa, M. A. Tabales. *Actas del Tercer Congreso Nacional de Historia de la Construcción.*
R. Guastavino. *Ensayo sobre la construcción cohesiva.* (en preparación)
J. Heyman. *Teoría, historia y restauración de estructuras de fábrica.*
J. Heyman. *El esqueleto de piedra. Mecánica de la arquitectura de fábrica*
J. Heyman. *La ciencia de las estructuras.*
S. Huerta. *Arcos, bóvedas y cúpulas.* (en preparación)
S. Huerta (ed.). *Las bóvedas de Guastavino en América.*
J. R. Perronet. *La construcción de puentes en el siglo XVIII.* (en preparación).
G. B. Piranesi. *Opere varie di Architettura.*
J. Rondelet. *L'art de bâtir* [láminas]
M. Seguí (ed.). *Félix Candela, arquitecto.*
H. Straub. *Historia de la ingeniería de la construcción.* (en preparación)
A. Truñó. *La construcción de bóvedas tabicadas.*
E. Viollet-le-Duc. *La construcción medieval.*


9 788497 280549